

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 febbraio 1914.

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul rotolamento di superficie applicabili in geometria ellittica ed iperbolica.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. I problemi fondamentali relativi al rotolamento di superficie applicabili, che ho trattato nella mia Nota precedente ⁽¹⁾ per il caso della *geometria euclidea*, si possono porre e risolvere nel medesimo modo pel caso di rotolamento di superficie applicabili negli spazi a curvatura costante, positiva o negativa. Scopo della presente Nota è appunto di estendere alla geometria ellittica ed iperbolica i risultati prima conseguiti per lo spazio euclideo.

Manteniamo le notazioni introdotte nel precedente lavoro, e cominciamo dall'osservare che le considerazioni geometriche ivi esposte ai nn. 1 e 2 valgono senz'altro in qualunque metrica a curvatura costante. Resta soltanto da vedere come si debba modificare la trattazione analitica dei problemi a causa della curvatura dello spazio.

Ma in primo luogo dobbiamo esaminare quali sono gli enunciati da darsi ai problemi fondamentali di rotolamento nella metrica a curvatura costante. Per questo consideriamo una superficie S_0 che rotola sopra una superficie applicabile S , ed un punto O , satellite di S_0 , che descrive una corrispondente superficie di rotolamento Σ . Se descriviamo col centro in O una sfera, questa sfera *satellite* invilupperà una superficie Σ' parallela a Σ . Ne risulta che i due problemi di determinare tutte le coppie (S, S_0) di

⁽¹⁾ Vedasi questi Rendiconti, seduta del 4 gennaio 1914.

superficie applicabili, assegnata che sia la superficie Σ di rotolamento descritta da un punto satellite, ovvero l'involuppo Σ' di rotolamento di una sfera satellite, si equivalgono perfettamente.

Ora, in geometria ellittica tra le sfere col centro in un punto O figura il piano polare di O (che da O dista di un quadrante); e mentre O descrive la superficie Σ di rotolamento, il suo piano polare involuppa la superficie Σ , polare di O .

Si vede quindi che, in geometria ellittica, i due problemi fondamentali A) B) formulati nella Nota precedente, e distinti nel caso euclideo, vengono qui a confondersi in un unico problema.

Al contrario, in geometria iperbolica, i problemi fondamentali si scindono in tre problemi distinti, corrispondentemente alla classificazione delle sfere in tre specie, e cioè: sfere a centro reale (a distanza finita); sfere a centro ideale o superficie geodeticamente parallele ad un piano; sfere con centro all'infinito, od orisfere.

Così adunque, per la geometria ellittica, abbiamo un solo problema fondamentale di rotolamento:

PROBLEMA α). — *Data una qualunque superficie Σ , trovare tutte le coppie (S, S_0) di superficie applicabili, tali che, rotolando S_0 sopra S , un conveniente punto O , satellite di S_0 , descriva la superficie Σ .*

In geometria iperbolica, invece, avremo tre problemi fondamentali di rotolamento, dei quali il primo è il problema α) stesso, ora enunciato pel caso ellittico. Quanto agli altri due, ove si osservi che ad ogni sfera a centro ideale è parallelo geodeticamente un piano, si vede che possono formularsi nel modo seguente:

PROBLEMA β). — *Data una superficie Σ (nello spazio iperbolico), trovare tutte le coppie (S, S_0) di superficie applicabili, tali che un piano π , satellite di S_0 nel rotolamento sopra S , involuppi Σ .*

Questo corrisponde al secondo problema, B), del caso euclideo.

Il terzo problema, particolare allo spazio iperbolico, si enuncia:

PROBLEMA γ). — *Data una superficie Σ (nello spazio iperbolico), trovare tutte le coppie (S, S_0) di superficie applicabili, tali che un'orisfera o satellite di S_0 , nel rotolamento sopra S , involuppi Σ .*

Dimostreremo che ciascuno di questi problemi ammette infinite soluzioni, la cui ricerca dipende dall'integrazione di un'equazione a derivate parziali del 2° ordine, che si può facilmente costruire procedendo come nel caso euclideo.

2. Per le considerazioni stesse svolte ai nn. 1, 2 della Nota precedente, i problemi enunciati si riconducono alla questione seguente:

Sopra ogni normale alla superficie data Σ , si domanda di riportare un segmento variabile $w = w(u, v)$ (indicando con u, v le coordinate curvilinee sopra Σ), in modo che la superficie S luogo degli estremi dei segmenti w ,

ammetta una superficie applicabile S_0 , per la quale si verifichino queste proprietà:

1^a) nel caso α), sia w la distanza del punto (u, v) di S_0 da un punto fisso;

2^a) nel caso β), w rappresenti la distanza del punto (u, v) di S_0 da un piano fisso;

3^a) nel caso γ), la stessa w dia la distanza del punto (u, v) mobile su S_0 da un'orìsfera fissa.

Dopo ciò, per costruire l'indicata equazione a derivate parziali, procediamo come segue: Riferiamo la superficie data Σ alle sue linee di curvatura (u, v) , e sia

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

l'elemento lineare di Σ , e indichino $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ le curvature principali (ridotte) ⁽¹⁾, talchè $E, G, \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ sono funzioni note di u, v . Inoltre, per semplificare, indicando con K_0 la curvatura dello spazio, supporremo

$$\begin{aligned} K_0 &= +1 \text{ (nel caso ellittico),} \\ K_0 &= -1 \text{ (nel caso iperbolico).} \end{aligned}$$

Riportando sulle normali di Σ i segmenti w , la superficie S (luogo degli estremi) ha un elemento lineare ds_1 , che si calcola subito colla formola

$$(1) \quad ds_1^2 = E \left(\cos w + \frac{\sin w}{\rho_2} \right)^2 du^2 + G \left(\cos w + \frac{\sin w}{\rho_1} \right)^2 dv^2 + dw^2$$

(per $K_0 = +1$),

ovvero

$$(1^*) \quad ds_1^2 = E \left(\cosh w + \frac{\sinh w}{\rho_2} \right)^2 du^2 + G \left(\cosh w + \frac{\sinh w}{\rho_1} \right)^2 dv^2 + dw^2$$

(per $K_0 = -1$).

Ora separiamo la trattazione dei diversi casi, cominciando dal

Caso α). Qui dovrà esistere una deformata S_0 della S , per la quale w rappresenti la distanza del punto (u, v) da un punto fisso O nello spazio. Se riferiamo lo S_0 a coordinate polari (w, α, β) col centro in O ($w = 0$), per l'elemento lineare ds_0 avremo ⁽²⁾

$$(2) \quad ds_0^2 = \sin^2 w (d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\beta^2) + dw^2 \quad (\text{per } K_0 = +1),$$

$$(2^*) \quad ds_0^2 = \sinh^2 w (d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\beta^2) + dw^2 \quad (\text{per } K_0 = -1).$$

⁽¹⁾ Vedansi le mie *Lezioni*, vol. I, § 215.

⁽²⁾ Vedansi le mie *Lezioni*, vol. I, § 186.

Poichè dobbiamo avere $ds_0^2 = ds^2$, confrontando colle (1) (1*) risulta

$$E \left(\cot w + \frac{1}{\varrho_2} \right)^2 du^2 + G \left(\cot w + \frac{1}{\varrho_1} \right)^2 dv^2 = d\alpha^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha d\beta^2$$

$$(K_0 = +1),$$

$$E \left(\coth w + \frac{1}{\varrho_2} \right)^2 du^2 + G \left(\coth w + \frac{1}{\varrho_1} \right)^2 dv^2 = d\alpha^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha d\beta^2$$

$$(K_0 = -1):$$

onde la condizione *necessaria e sufficiente* è che w sia una tale funzione di u, v , da rendere la curvatura delle forme differenziali, nei primi membri, $= +1$. Dunque:

L'equazione a derivate parziali del 2° ordine per w , da cui dipende la risoluzione del problema α), si forma scrivendo che hanno curvatura $= +1$ le forme differenziali:

$$(3) \quad E \left(\cot w + \frac{1}{\varrho_2} \right)^2 du^2 + G \left(\cot w + \frac{1}{\varrho_1} \right)^2 dv^2 \quad \text{nel caso ellittico,}$$

$$(3^*) \quad E \left(\coth w + \frac{1}{\varrho_2} \right)^2 du^2 + G \left(\coth w + \frac{1}{\varrho_1} \right)^2 dv^2 \quad \text{nel caso iperbolico.}$$

Caso β . In questo secondo caso, w sarà la distanza del punto (u, v) di S_0 da un piano fisso ($w = 0$); e l'elemento lineare di S_0 si potrà porre sotto la forma iperbolica

$$(4) \quad ds_0^2 = \cosh^2 w (d\alpha^2 + \operatorname{senh}^2 \alpha d\beta^2) + dw^2,$$

essendo $w = 0$ il piano fisso, ed α, β un sistema di coordinate geodetiche su questo piano. Confrontando con (1*), abbiamo

$$E \left(1 + \frac{\operatorname{tgh} w}{\varrho_2} \right)^2 du^2 + G \left(1 + \frac{\operatorname{tgh} w}{\varrho_1} \right)^2 dv^2 = d\alpha^2 + \operatorname{senh}^2 \alpha d\beta^2,$$

onde la forma differenziale a sinistra dovrà avere la curvatura $= -1$, come quella a destra.

Dunque: *L'equazione a derivate parziali caratteristica per w nel caso β), si forma scrivendo che è $= -1$ la curvatura della forma differenziale*

$$(5) \quad E \left(1 + \frac{\operatorname{tgh} w}{\varrho_2} \right)^2 du^2 + G \left(1 + \frac{\operatorname{tgh} w}{\varrho_1} \right)^2 dv^2.$$

Caso γ . Significando qui w la distanza del punto (u, v) di S_0 da un'oriserfa fissa ($w = 0$), potremo dare all'elemento lineare dello spazio la forma parabolica

$$(6) \quad ds_0^2 = e^{2w} (d\alpha^2 + d\beta^2) + dw^2;$$

e, dal paragone colla (1*), risulta

$$E \left(e^{-w} \cosh w + \frac{e^{-w} \sinh w}{\varrho_2} \right)^2 du^2 + \\ + G \left(e^{-w} \cosh w + \frac{e^{-w} \sinh w}{\varrho_1} \right)^2 dv^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Dunque:

L'equazione a derivate parziali per w nella risoluzione del problema γ si forma scrivendo che è nulla la curvatura della forma differenziale

$$(7) \quad E \left(e^{-w} \cosh w + \frac{e^{-w} \sinh w}{\varrho_2} \right)^2 du^2 + \\ + G \left(e^{-w} \cosh w + \frac{e^{-w} \sinh w}{\varrho_1} \right)^2 dv^2.$$

Abbiamo così provato che ciascuno dei problemi α) β) γ) ammette infinite soluzioni, corrispondenti biunivocamente alle soluzioni w della corrispondente equazione a derivate parziali.

Scelta una tale soluzione w , si conosce immediatamente la superficie S d'appoggio; e la rotolante S_0 , unica e determinata, si ottiene integrando una equazione di Riccati nei casi α) e β), e con sole quadrature nel caso γ).

3. Suppongasi che la superficie Σ (o l'involuppo) di rotolamento, nei problemi α) β) γ), sia un piano ovvero una sfera, che nel caso iperbolico potrà appartenere ad una qualunque delle tre specie. Potremo prendere $E=G$, ed inoltre avremo

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2} = \text{cost } (^1).$$

(¹) Nella geometria ellittica od iperbolica si ha un'altra notevole superficie con raggi principali di curvatura costanti (non uguali), e cioè la *superficie di Clifford*, a curvatura totale nulla. Qui si può prendere $E=G=1$, e si ha

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = -1 \text{ nel caso ellittico; } \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = +1 \text{ nel caso iperbolico.}$$

La risoluzione del problema α) per la superficie di Clifford, come superficie di rotolamento, dipende dalla riduzione dell'elemento lineare della sfera ordinaria alle forme di Weingarten

$$\left(\cot w + \frac{1}{\varrho_2} \right)^2 du^2 + \left(\cot w + \frac{1}{\varrho_1} \right)^2 dv^2 \quad (\text{per } K_0 = +1),$$

$$\left(\coth w + \frac{1}{\varrho_2} \right)^2 du^2 + \left(\coth w + \frac{1}{\varrho_1} \right)^2 dv^2 \quad (\text{per } K_0 = -1),$$

ed equivale quindi a cercare tutte le superficie applicabili sopra una certa superficie di rotazione nello spazio euclideo.

Per quanto si è visto al numero precedente, il problema si cangia nell'altro di trovare tutti i sistemi ortogonali isotermini sopra una superficie a curvatura costante, problema che si sa risolvere completamente. Ma si può spingere più in là la ricerca, seguendo un procedimento analogo a quello dato dal Calò pel caso euclideo, e trovare *in termini finiti* tutte le coppie (S, S_0) di superficie applicabili che risolvono il problema $\alpha)$, $\beta)$ o $\gamma)$ nel caso di una superficie Σ di rotolamento, sferica.

A questo scopo scriviamo prima le formole che danno il passaggio dalle coordinate geodetiche w, α, β nei rispettivi casi (2), (2*), (4), (6) alle coordinate di Weierstrass

$$x_0, x_1, x_2, x_3,$$

legate dalla identità quadratica

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \text{nel caso ellittico,}$$

o dall'altra

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1 \quad \text{nel caso iperbolico.}$$

Distinguiamo quattro casi corrispondenti alle forme geodetiche ora citate dell'elemento lineare ds_0 dello spazio:

1° caso. Indicando con τ la variabile complessa sulla sfera d'elemento lineare

$$d\alpha^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha d\beta^2,$$

e con τ_0 la coniugata, abbiamo

$$(8) \quad ds_0^2 = dw^2 + \operatorname{sen}^2 w \frac{4 d\tau d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2};$$

e per le formole che danno le coordinate di Weierstrass, possiamo prendere le seguenti:

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \cos w, \quad x_1 = \operatorname{sen} w \frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad x_2 = \operatorname{sen} w \frac{\tau - \tau_0}{i(\tau\tau_0 + 1)}, \\ x_3 = \operatorname{sen} w \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1}. \end{array} \right.$$

2° caso. Nel caso iperbolico, e per la forma geodetica ellittica (2*) dell'elemento lineare dello spazio, abbiamo

$$(8^*) \quad ds_0^2 = dw^2 + \operatorname{senh}^2 w \frac{4 d\tau d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2};$$

per le corrispondenti coordinate di Weierstrass valgono le formole

$$(a^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \cosh w, \quad x_1 = \operatorname{senh} w \frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad x_2 = \operatorname{senh} w \frac{\tau - \tau_0}{i(\tau\tau_0 + 1)}, \\ x_3 = \operatorname{senh} w \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1}. \end{array} \right.$$

3° caso. Per la forma geodetica iperbolica (4) dell'elemento lineare dello spazio, introducendo la variabile complessa τ sulla pseudosfera (e la coniugata τ_0) colla formola (1)

$$d\alpha^2 + \sinh^2 \alpha d\beta^2 = - \frac{4 d\tau d\tau_0}{(\tau - \tau_0)^2}, \quad (1)$$

avremo

$$(9) \quad ds_0^2 = dw^2 - \cosh^2 w \frac{4 d\tau d\tau_0}{(\tau - \tau_0)^2}.$$

Per le coordinate di Weierstrass, possiamo assumere

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \cosh w \frac{\tau\tau_0 + 1}{i(\tau - \tau_0)}, \quad x_1 = \sinh w, \quad x_2 = \cosh w \frac{1 - \tau\tau_0}{i(\tau - \tau_0)}, \\ x_3 = \cosh w \frac{\tau + \tau_0}{i(\tau + \tau_0)}. \end{array} \right.$$

4° caso. Se l'elemento lineare dello spazio ha la forma parabolica (6), introducendo la variabile complessa sul piano

$$\tau = \alpha + i\beta, \quad \tau_0 = \alpha - i\beta,$$

abbiamo

$$(10) \quad ds_0^2 = dw^2 + e^{2w} d\tau d\tau_0,$$

e le formole per le coordinate di Weierstrass si possono scrivere:

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{e^w}{2} (e^{-2w} + \tau\tau_0 + 1), \quad x_1 = \frac{e^w}{2} (1 - \tau\tau_0 - e^{-2w}), \\ x_2 = \frac{e^w}{2} (\tau + \tau_0), \quad x_3 = \frac{e^w}{2} \frac{\tau - \tau_0}{i}. \end{array} \right.$$

4. Ciò premesso, supponiamo che sia (S_0, S) una coppia di superficie applicabili dello spazio ellittico che risolvano il problema α), quando la superficie Σ di rotolamento sia una sfera di raggio geodetico $= a$. Riferiamo la superficie rotolante ad un sistema di coordinate polari (w, τ, τ_0) col centro nel punto satellite O , e riferiamo anche la superficie S d'appoggio ad un sistema analogo di coordinate polari, che indicheremo con $\bar{w}, \bar{\tau}, \bar{\tau}_0$, il cui polo sia nel centro della sfera Σ . I rispettivi elementi lineari ds_0, ds , della S_0 e della S , saranno dati da

$$ds_0^2 = dw^2 + \sinh^2 w \frac{4 d\tau d\tau}{(1 + \tau\tau_0)^2}$$

$$d\bar{s}^2 = d\bar{w}^2 + \sinh^2 \bar{w} \frac{4 d\bar{\tau} d\bar{\tau}}{(2 + \bar{\tau}\bar{\tau}_0)^2}.$$

(1) *Lezioni*, vol. I, pag. 389.

Ora si ha, per ipotesi,

$$ds_0^2 = \overline{ds}^2, \quad \overline{w} = w + a \quad (d\overline{w} = dw),$$

indi

$$(10) \quad \frac{\operatorname{sen}^2(w + a)}{\operatorname{sen}^2 w} \frac{d\overline{\tau} d\overline{\tau}_0}{(1 + \overline{\tau} \overline{\tau}_0)^2} = \frac{d\tau d\tau_0}{(1 + \tau \tau_0)^2}.$$

Di qui segue che $\overline{\tau}$ deve essere funzione di τ (ovvero della coniugata), nel senso di funzione di variabile complessa, poniamo

$$\overline{\tau} = f(\tau), \quad \overline{\tau}_0 = f_0(\tau_0).$$

Indicando con accenti le derivate, la (10) ci dà

$$\cos a + \operatorname{sen} a \cot w = \frac{f f_0 + 1}{\sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)},$$

ossia

$$\cot w = \frac{f f_0 + 1 - \cos a \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)}{\operatorname{sen} a \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)}.$$

Se adunque poniamo

$$(11) \quad \Omega = \sqrt{(f f_0 + 1)^2 + f' f'_0 (\tau \tau_0 + 1)^2 - 2 \cos a \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1) (f f_0 + 1)},$$

avremo

$$\cos w = \frac{f f_0 + 1 - \cos a \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)}{\Omega}, \quad \operatorname{sen} w = \frac{\operatorname{sen} a \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)}{\Omega}$$

$$\cos \overline{w} = \frac{(f f_0 + 1) \cos a - \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)}{\Omega}, \quad \operatorname{sen} \overline{w} = \frac{\operatorname{sen} a (f f_0 + 1)}{\Omega}.$$

Sostituendo nelle formole (a), e nelle analoghe, troviamo, in termini finiti, tutte le coppie (S_0, S) di superficie applicabili domandate, colle formole seguenti:

$$S_0) \quad \left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{f f_0 + 1 - \cos a \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)}{\Omega} \\ x_1 &= \frac{\operatorname{sen} a \sqrt{f' f'_0} (\tau + \tau_0)}{\Omega} \\ x_2 &= \frac{\operatorname{sen} a \sqrt{f' f'_0} (\tau - \tau_0)}{i \Omega} \\ x_3 &= \frac{\operatorname{sen} a \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 - 1)}{\Omega} \end{aligned} \right.$$

$$S) \left\{ \begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{(ff_0 + 1) \cos \alpha - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}{\Omega} \\ \bar{x}_1 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha (f + f_0)}{\Omega} \\ \bar{x}_2 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha (f - f_0)}{i\Omega} \\ \bar{x}_3 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha (ff_0 - 1)}{\Omega} \end{aligned} \right.$$

Qui, per $f(\tau)$ s'intende una qualunque funzione della variabile complessa τ , ed Ω ha il valore (11).

Queste formole assegnano esplicitamente tutte le coppie (S_0 , S) di superficie applicabili che risolvono, nel caso ellittico, il problema α), dando le coordinate (x_0, x_1, x_2, x_3) , $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ di S_0 , S) che si corrispondono nell'applicabilità. Se si fa rotolare S_0 sopra S il punto di coordinate $(1, 0, 0, 0)$ satellite di S_0 descrive la sfera Σ di raggio geodetico $= a$. In particolare, se prendiamo $a = \frac{\pi}{2}$, le formole subiscono un'evidente semplificazione, e la superficie Σ di rotolamento diventa un piano.

5. Passiamo al problema α) in geometria iperbolica nell'ipotesi che la superficie Σ di rotolamento sia una sfera; e distinguiamo tre casi, secondo che:

- a) Σ è una sfera a centro reale;
- b) Σ è una sfera a centro ideale;
- c) Σ è un'orisfera.

Caso a). Indichiamo ancora con a il raggio geodetico della sfera, e procediamo sulle formole (8*) (a^*) come prima colle (8) (a). Troveremo che le coppie di superficie applicabili richieste si hanno in termini finiti, colle formole seguenti:

$$S_0) \left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{ff_0 + 1 - \cosh a \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}{\Omega} \\ x_1 &= \frac{\operatorname{senh} a \sqrt{f'f'_0}(\tau + \tau_0)}{\Omega} \\ x_2 &= \frac{\operatorname{senh} a \sqrt{f'f'_0}(\tau - \tau_0)}{i\Omega} \\ x_3 &= \frac{\operatorname{senh} a \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 - 1)}{\Omega} \end{aligned} \right.$$

$$(S_0) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{(f/f_0 + 1) \cosh a - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}{\Omega} \\ \bar{x}_1 &= \frac{\sinh a(f + f_0)}{\Omega} \\ \bar{x}_2 &= \frac{\sinh a(f - f_0)}{i\Omega} \\ \bar{x}_3 &= \frac{\sinh a(f f_0 - 1)}{\Omega} \end{aligned} \right.$$

$$\Omega = \sqrt{(f/f_0 + 1)^2 + f'f'_0(\tau\tau_0 + 1)^2 - 2 \cosh a \sqrt{f'f'_0}(f/f_0 + 1)(\tau\tau_0 + 1)}.$$

Caso b). In questo caso, per la superficie S d'appoggio dovremo adoperare la forma (9) dell'elemento lineare

$$d\bar{s}^2 = d\bar{w}^2 - \cosh^2 \bar{w} \frac{4 d\bar{\tau} d\bar{\tau}_0}{(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)^2},$$

ed avremo nuovamente

$$\bar{w} = w + a,$$

se con a indichiamo la distanza geodetica della sfera Σ , a centro ideale, dal piano parallelo. Paragonando col ds^2 dato dalla (8*), ne deduciamo

$$\sinh^2 w \frac{d\tau d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2} = - \cosh^2(w + a) \frac{d\bar{\tau} d\bar{\tau}_0}{(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)^2},$$

indi

$$\bar{\tau} = f(\tau) \quad , \quad \bar{\tau}_0 = f_0(\tau_0),$$

$$\coth w \cosh a + \sinh a = i \frac{f - f_0}{\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}.$$

Per la coppia (S_0, S) di superficie applicabili, si trovano di qui le formole:

$$(S_0) \quad \left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{i(f - f_0) - \sinh a \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}{\Omega} \\ x_1 &= \frac{\cosh a \sqrt{f'f'_0}(\tau + \tau_0)}{\Omega} \\ x_2 &= \frac{\cosh a \sqrt{f'f'_0}(\tau - \tau_0)}{i\Omega} \\ x_3 &= \frac{\cosh a \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 - 1)}{\Omega} \end{aligned} \right.$$

$$S) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{x}_0 &= \cosh a \frac{f f_0 + 1}{\Omega} \\ \bar{x}_1 &= \frac{i(f - f_0) \sinh a + \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)}{\Omega} \\ \bar{x}_2 &= \frac{\cosh a (1 - f f_0)}{\Omega} \\ \bar{x}_3 &= \frac{\cosh a (f + f_0)}{\Omega}, \end{aligned} \right.$$

dove si è posto:

$$\Omega = \sqrt{i^2(f - f_0)^2 - f' f'_0 (\tau \tau_0 + 1)^2 - 2i(f - f_0) \sinh a \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)}.$$

Queste formole assumono una forma più semplice quando la superficie Σ di rotolamento sia un piano, chè allora si ha $a = 0$.

Caso c). Supponendo, da ultimo, che la superficie di rotolamento Σ sia un'orispera, adoperiamo per la superficie S d'appoggio la forma parabolica (10) dell'elemento lineare

$$ds^2 = d\bar{w}^2 + e^{2\bar{w}} d\bar{\tau} d\bar{\tau}_0,$$

ed in questa facciamo, come è lecito, $\bar{w} = w$. Paragonando colla (8*), ne deduciamo, qui,

$$\sinh^2 w \frac{4 d\tau d\tau_0}{(\tau \tau_0 + 1)^2} = e^{2w} d\bar{\tau} d\bar{\tau}_0,$$

indi

$$\bar{\tau} = f(\tau), \quad \bar{\tau}_0 = f_0(\tau_0)$$

$$e^{-w} \sinh w = \frac{\sqrt{f' f'_0}}{2} (\tau \tau_0 + 1),$$

ovvero

$$e^{-2w} = 1 - \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1),$$

e, per ciò,

$$\cosh w = \frac{2 - \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)}{2\sqrt{1 - \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)}}, \quad \sinh w = \frac{\sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)}{2\sqrt{1 - \sqrt{f' f'_0} (\tau \tau_0 + 1)}}.$$

Con queste formole, servendoci delle (a*) e delle (c), per la coppia di superficie applicabili (S_0, S) deduciamo le seguenti formole definitive:

$$S_0) \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{2 - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}{2\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}} \\ x_1 = \frac{\sqrt{f'f'_0}(\tau + \tau_0)}{2\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}} \\ x_2 = \frac{\sqrt{f'f'_0}(\tau - \tau_0)}{2i\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}} \\ x_3 = \frac{\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 - 1)}{2\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}} \end{array} \right. S) \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_0 = \frac{2 + f/f_0 - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}{2\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}} \\ \bar{x}_1 = \frac{\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1) - f/f_0}{2\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}} \\ \bar{x}_2 = \frac{f + f_0}{2\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}} \\ \bar{x}_3 = \frac{f - f_0}{2i\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0 + 1)}} \end{array} \right.$$

In modo perfettamente simile a quello qui usato pel problema α), si troverebbero in termini finiti le coppie (S_0, S) di superficie applicabili che risolvono i problemi β) e γ) in geometria iperbolica quando per involuppo di rotolamento si assuma una sfera appartenente ad una qualunque delle tre specie.

Matematica. — *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$.* Nota I del Corrispondente F. ENRIQUES.

1. Il problema capitale della teoria delle superficie algebriche è la classificazione di queste, cioè la determinazione effettiva delle *famiglie* di superficie distinte per trasformazioni birazionali, ciascuna famiglia venendo caratterizzata da un gruppo di caratteri interi invarianti e contenendo, entro di sè, un'infinità continua di *classi* dipendenti da un certo numero di parametri (moduli).

Vale la pena di esaminare quali risultati d'insieme si possano trarre dal lavoro dell'ultimo ventennio, in ordine al suddetto problema di classificazione.

Questo è appunto lo scopo della presente Nota, in cui pervengo alle conclusioni che seguono:

La classificazione delle superficie algebriche, conduce naturalmente a considerare il genere d'ordine 12: P_{12} .

Per $P_{12} = 0$ si ha la famiglia delle rigate.

Per $P_{12} = 1$ si hanno le superficie possedenti *curve canoniche* o *pluricanoniche d'ordine 0* (tutti i P_i essendo $= 0, 1$).

Per $P_{12} > 1$ si hanno le superficie con curve canoniche o pluricanoniche effettive, d'ordine > 0 .

Per $P_{12} \geq 1$ il genere lineare $p^{(1)} \geq 1$ (mentre si può ritenere — com'è noto — $p^{(1)} \leq 0$ per le rigate, cioè per $P_{12} = 0$).

Ad ogni valore del genere lineare $p^{(1)} > 1$ corrisponde un numero finito di famiglie di superficie.

Per $p^{(1)} = 1$ si ha un'infinità numerabile di famiglie in cui entrano due interi arbitrari; tali famiglie sono caratterizzate dal contenere un fascio di curve ellittiche, salvo per $p_g = P_4 = 1$: in questo caso si hanno superficie di generi geometrici,

$$p_g = P_1 = P_2 = \dots = 1,$$

e di genere numerico,

$$p_a = 1 \quad \text{o} \quad p_a = -1,$$

dipendenti altresì da un intero arbitrario (e da 19 o 3 moduli rispettivamente) che non contengono, in generale, fasci di curve ellittiche.

La costruzione e lo studio delle superficie con $p^{(1)} = 1$ ($p_g P_4 \neq 1$) dà luogo a sviluppi interessanti in ordine ai valori dei plurigeneri, alla base e ai moduli. Questi sviluppi sono riferiti, per semplicità, al caso delle superficie regolari ($p_a = p_g$). Ma l'estensione al caso $p_a < p_g$ non presenta difficoltà essenziali.

2. Nella teoria delle superficie s'introducono, com'è noto, i seguenti caratteri invarianti ⁽¹⁾:

- a) il genere geometrico $p_g = P_1$, ed i plurigeneri P_2, P_3, \dots ;
- b) il genere lineare (virtuale) $p^{(1)}$;
- c) il genere numerico (o aritmetico) p_a .

La classificazione delle superficie secondo i valori dei plurigeneri conduce a considerare in ispecie il 12-genere, P_{12} , e a distinguere i tre casi:

$$P_{12} = 0, \quad P_{12} = 1, \quad P_{12} > 1.$$

La condizione

$$P_{12} = 0 \qquad (P_4 = P_6 = 0)$$

caratterizza la famiglia delle superficie razionali e rigate ⁽²⁾.

3. La condizione

$$P_{12} = 1$$

caratterizza le superficie possedenti una curva canonica o pluricanonica d'ordine 0, sopra le quali (riferendosi ad un modello senza curve eccezionali) ogni sistema di curve di genere (virtuale) π è di grado (virtuale)

$$n = 2\pi - 2.$$

⁽¹⁾ Cfr. F. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, in Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), 1896.

⁽²⁾ Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, in Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1905.

Il teorema sopra enunciato risulta dall'analisi delle differenti famiglie di superficie con $P_{12} = 1$, che sono le seguenti:

a) Per $p_a = -1$, le superficie iperellittiche irregolari, cioè:

a') le superficie iperellittiche di rango 1 (di Picard) caratterizzate ⁽¹⁾ da

$$p_a = -1, \quad p_g = P_4 = 1,$$

e formanti un'infinità numerabile di famiglie (con 3 moduli) indipendenti da un numero intero δ , detto il divisore di codeste superficie ⁽²⁾;

a'') le superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$ che formano 7 famiglie di superficie ellittiche

$$(r = 2, 3, 4, 6)$$

di determinante $n = 2, 4, 3, 9, 4, 8, 6$, classificate da Bagnera-De Franchis e caratterizzate ⁽³⁾ mediante i valori dei plurigeneri che per esse sono uguali a 0 e 1. Si ha infatti, per codeste superficie, secondochè $r = 2, 3, 4, 6$, un primo plurigenere non nullo, $P_2 = 1$, o $P_3 = 1$, o $P_4 = 1$, o $P_6 = 1$, e quindi, in ogni caso,

$$P_{12} = 1.$$

b) Per

$$p_a = 0,$$

le superficie coi generi dispari nulli e coi generi pari uguali ad 1, caratterizzate da

$$p_a = P_3 = 0, \quad P_2 = 1,$$

e riducibili alla sestica che passa doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro (10 moduli) ⁽⁴⁾.

c) Per

$$p_a = 1,$$

le superficie con tutti i generi uguali ad 1, caratterizzate da

$$p_a = P_4 = 1 \text{ } ^{(5)},$$

⁽¹⁾ Enriques, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali*, in Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1905.

⁽²⁾ Cfr. p. es. Enriques-Severi, *Mémoires sur les surfaces hyperelliptiques*, in Acta Math., tom. 32.

⁽³⁾ Enriques-Severi, *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari*, in Rendiconti Accad. Lincei, 1908.

⁽⁴⁾ Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, in Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), 1906.

⁽⁵⁾ Enriques, *Sui piani doppi di genere uno*, in Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), 1896.

le quali formano un'infinità numerabile di superficie dipendenti da un intero $\pi = 2, 3, \dots$ (e da 19 moduli per ciascuna famiglia) ⁽¹⁾.

Dimostriamo che, effettivamente, i tipi a) b) c) esauriscono tutte le superficie con $P_{12} = 1$.

A tale scopo si osservi anzitutto che, per $P_{12} = 1$, si hanno superficie non appartenenti alla famiglia delle rigate, e perciò dovrà essere, intanto ⁽²⁾,

$$p_a \geq 1,$$

cioè

$$p_a = -1, \text{ o } p_a = 0, \text{ o } p_a = 1.$$

Ora vediamo che:

a) Una superficie per cui $p_a = -1$, avrà il genere geometrico $p_g = 0$ o $p_g > 0$, e sarà una superficie ellittica.

Pongasi $p_g = 0$. Il calcolo dei plurigeneri delle superficie ellittiche di genere $p_g = 0$ conduce a $P_m > 1$ per $m = 3, 4, \dots$, se $P_2 > 0$ ⁽³⁾. In questa ipotesi si ha (almeno) una curva bicanonica C e una curva tricanonica K; e combinando linearmente $3C$ e $2K$, si ottiene un fascio di curve sesticanoniche: $P_6 \geq 2$, e, a fortiori, $P_{12} > 1$.

Se invece si suppone il bigenere $P_2 = 0$, si distinguono 4 categorie di superficie ⁽⁴⁾ e per l'ultima è $P_2 = 2$ ($P_{12} > 1$). Le superficie delle tre prime categorie hanno $P_{12} = 1$ soltanto nel caso in cui contengano un fascio ellittico di curve di genere $\pi = 1$, cioè nel caso delle superficie (iperellittiche) in cui le curve pluricanoniche sono d'ordine 0; per $\pi > 1$ risulta sempre $P_{12} > 1$.

Infine, per $p_a = -1$, $p_g > 0$, l'ipotesi $P_{12} = 1$ porterà $p_g = 1$, $P_4 = 1$.

b) In secondo luogo si supponga

$$p_a = 0, \quad P_{12} = 1.$$

Non può essere $p_g = 1$, perchè le condizioni $p_g = 1$ e $P_4 = 1$ (conseguenza di $P_{12} = 1$) portano $p_a = -1$ o $p_a = +1$ ⁽⁵⁾ e caratterizzano rispet-

⁽¹⁾ Cfr. Enriques, *Le superficie di genere uno*, in Rendiconti Accad. Bologna, 13 dicembre 1908; Severi, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*, in Atti Istituto Veneto, 10 gennaio 1909.

⁽²⁾ Castelnuovo, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo*, in Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1905.

⁽³⁾ Cfr. Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, in Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, loc. cit.

⁽⁴⁾ loc. cit., § 9.

⁽⁵⁾ Enriques, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 1''$* , in Rendiconti Accad. Bologna, 7 dicembre 1906.

tivamente le famiglie di superficie iperellittiche di Picard o di superficie coi generi 1 sopra menzionate. Si avrà, dunque,

$$p_a = p_g = 0$$

e $P_2 > 0$, poichè le condizioni $p_a = P_2 = 0$ caratterizzano le superficie razionali ⁽¹⁾; ma, essendo $P_{12} = 1$, si deduce $P_2 = 1$, $P_6 = 1$: quindi ⁽²⁾ $P_3 = 0$, e si ricade nel tipo della sestica sopra nominato.

c) Finalmente, se $p_a = 1$, la $P_{12} = 1$ porta $P_2 = 1$, e quindi si hanno superficie con tutti i generi uguali ad 1.

4. La condizione

$$P_{12} > 1$$

caratterizza l'insieme delle superficie possedenti infinite curve canoniche o pluricanoniche; ma occorre distinguere due casi, secondochè il genere lineare

$$p^{(1)} > 1$$

oppure

$$p^{(1)} = 1.$$

Le superficie per cui

$$p^{(1)} > 1$$

avranno il genere

$$p_g \geq 0,$$

il bigenere

$$P_2 \geq p^{(1)} \geq 2,$$

il trigenere

$$P_3 \geq 3p^{(1)} - 2 \geq 4;$$

e i sistemi canonici e pluricanonici saranno, in ogni caso, di grado > 0 .

Si deduce che:

Ogni superficie di genere lineare $p^{(1)} > 1$ può essere trasformata in una superficie (canonica o pluricanonica), le cui sezioni piane o iperpiane sono curve canoniche o pluricanoniche, superficie che ne porge un modello invariante.

La superficie i canonica riuscirà certo semplice per i assai grande. Ma, se non si fa distinzione tra superficie semplici e multiple ⁽³⁾, si può aggiungere che esiste sempre un modello costituito da una superficie bicanonica

⁽¹⁾ Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero*, in Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), 1896.

⁽²⁾ Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, loc. cit.

⁽³⁾ La determinazione dei casi in cui le superficie canoniche o bicanoniche ecc. si riducano a superficie multiple, costituisce un problema, che sembra ammettere un piccolo numero di soluzioni, e che additiamo all'attenzione degli studiosi.

per $p^{(1)} > 3$, ed un modello costituito da una superficie tricanonica per $p^{(1)} = 2, 3$ ⁽¹⁾.

Invece per $p^{(1)} = 1$, $P_{12} > 1$, tutte le curve pluricanoniche sono composte delle curve ellittiche d'un fascio, sicchè non conducono ad un modello invariante della superficie.

5. L'esistenza d'una superficie canonica o pluricanonica, modello invariante delle superficie di genere lineare $p^{(1)} > 1$, porta una conseguenza importante in ordine alla classificazione di queste.

Per ogni valore di $p^{(1)} > 1$, si hanno superficie canoniche di un ordine dato $p^{(1)} - 1$, o superficie bicanoniche d'ordine $4(p^{(1)} - 1)$, o tricanoniche d'ordine $9(p^{(1)} - 1)$, a sezioni di genere parimente dato. Ora, se si tratta di determinare le superficie d'un ordine dato, a sezioni di dato genere, cioè con una curva doppia d'ordine dato, il problema, di natura algebrica, condurrà ad un numero finito di famiglie distinte ed irriducibili, ogni famiglia essendo costituita da una serie continua di superficie e di classi proiettivamente (e, quindi, birazionalmente) distinte. Vediamo dunque che, per $p^{(1)} > 1$, ad ogni valore del genere lineare $p^{(1)}$ corrisponde un numero finito di famiglie di superficie, con caratteri interi distinti.

Questa conclusione non sussiste più per $p^{(1)} = 1$. Già, per $P_{12} = 1$, le superficie iperellittiche $(a, 1)$ e le superficie coi generi 1 (c) offrono serie di famiglie dipendenti da un numero intero arbitrario.

Si considerino ora in generale le superficie con $p^{(1)} = 1$, $P_{12} > 1$; la classificazione di queste superficie, che ci proponiamo di svolgere, condurrà a riconoscere che esse formano una serie di famiglie in cui entrano due numeri interi arbitrari.

6. Abbiamo già notato che le superficie con $P_{12} > 1$, $p^{(1)} = 1$, posseggono un fascio di curve ellittiche; lo stesso può dirsi delle superficie con $P_{12} = 1$ (per cui è sempre $p^{(1)} = 1$), fatta eccezione delle superficie coi generi geometrici 1:

$$p_g - P_{12} = 1 \quad (p_a = -1, +1),$$

cioè dalle superficie a) b) e c) del n. 3.

Più precisamente: le superficie con $P_{12} \geq 1$, $p^{(1)} = 1$, eccettuati i casi corrispondenti a $p_g P_{12} = 1$, ($p_g = P_{12} = 1$), posseggono un fascio di curve ellittiche di genere $p_g - p_a$, per $p_a \geq 0$, ed invece un fascio di curve ellittiche di genere p_g ed un secondo di genere 1 nel caso $p_a = 1$ ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Alcune importanti disequaglianze stabilite dal sig. A. Rosenblatt (Comptes rendus e Bull. Acad. Cracovie, 1912), permettono di aggiungere che $p_g > 3$; e quindi esiste una superficie canonica, appena $p^{(1)}$ sorpassa un certo limite.

⁽²⁾ Cfr. Enriques, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 1$* , in Rendiconti Accad. Bologna, dicembre 1906.

Viceversa, le superficie con un fascio di curve ellittiche (non appartenenti alla famiglia delle rigate) hanno $P_{12} \geq 1$, $p^{(1)} = 1$ e $p_0 P_4 \neq 1$ oppure $p_g P_4 = 1$; in quest'ultimo caso sono *superficie particolari* coi generi geometrici 1.

Vogliamo ora classificare le superficie possedenti un fascio di curve ellittiche C.

Un primo carattere di tali superficie, che designeremo col nome di *determinante d* di esse, è il minimo numero di punti in cui una curva K, non composta colle C del fascio, incontra le C, cioè l'*ordine del minimo gruppo di punti costruibili sopra ogni C* del fascio mediante operazioni razionali ed operazioni irrazionali non dipendenti dal parametro delle C.

Vi sono superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$ ($p_g P_{12} \neq 1$), per cui il determinante ha un valore intero arbitrario:

$$d = 1, 2, 3 \dots$$

Ciò risulta già dalla costruzione delle superficie di genere $p_a = -1$. Questi esempi provano che «l'ordine minimo d'un gruppo di punti, costruibile sopra una curva ellittica non può generalmente essere abbassato al disotto dell'ordine della curva, *senza introdurre irrazionalità* dipendenti dai coefficienti dell'equazione della curva» ⁽¹⁾.

Si possono costruire altri esempi di superficie per cui $p^{(1)} = 1$, e *d* assume un valore arbitrariamente alto.

Si consideri p. es. un cono cubico F_3 e le sezioni di esso coi piani per una retta a . Sopra una generica di queste cubiche si può determinare un gruppo di 9 punti base per un fascio di curve d'ordine $3n$ con 9 punti n pli (fascio di Halphen); tale costruzione dipende dalla divisione dell'argomento delle funzioni ellittiche appartenenti alla cubica, e perciò riesce razionale rispetto al parametro del piano per a . Si deduce la costruzione razionale in ogni piano, per a , di una curva d'ordine $3n$ con 9 punti n pli, variabili su 9 rette distinte.

Codesta curva descrive in generale una superficie non riducibile alla famiglia delle rigate, per cui il genere lineare $p^{(1)} = 1$ e il determinante $d = n$. Si riconosce, infatti, che il determinante non può essere $< n$ se il fascio delle C_{3n} contiene (come avverrà generalmente) delle cubiche contate n volte.

7. *Ad ogni superficie F^d con un fascio di curve ellittiche C ($p^{(1)} = 1$), di determinante d , si può far corrispondere una superficie di determinante 1 la quale possenga un fascio (dello stesso genere) di curve birazionalmente identiche alle C.*

(1) Cfr. Enriques, *Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche*, in Rendiconti Accad. Lincei, 7 gennaio 1912.

A tale scopo basta infatti costruire la superficie F' i cui punti corrispondono alle serie g_n^{n-1} appartenenti alle C di F^d , codeste serie venendo prese come « elementi » di una varietà ∞^2 .

Tale costruzione è stata già indicata nella mia citata Nota *Sulla superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche*.

Fra le superficie F^d , F' , intercede una corrispondenza algebrica $[d, d]$, in cui si corrispondono le curve ellittiche birazionalmente identiche.

Infatti si considerino su F^d , F' , due generiche curve ellittiche omologhe C , K , e: su F^d una curva L secante la C in un gruppo G di d punti; su F' la curva L' unisecante K nel punto che rappresenta la g_d^{d-1} di C , definita da G_d . Se a questo punto di K si fa corrispondere uno, P , fra i d punti di G_d , resta determinata razionalmente fra K e C una corrispondenza biunivoca, perchè ogni punto di C , associato al gruppo dei $d - 1$ punti $G_d - P$, dà un gruppo di d punti, a cui corrisponde — per costruzione — un punto di K .

In tal guisa si hanno appunto d corrispondenze biunivoche fra K , C , le quali non possono essere razionalmente staccate al variare del parametro da cui dipendono le curve K e C nei rispettivi fasci. Si ha dunque, fra K , C e fra F' , F^d , una corrispondenza algebrica $[d, d]$.

Sono in generale curve di coincidenza di questa corrispondenza sulla F' le curve K dotate d'un punto doppio; sulla F^d sono parimente curve di coincidenza le C dotate d'un punto doppio (corrispondenti alle nominate K), ma anche le curve C che si riducono a curve *ellittiche multiple*, curve da contarsi un certo numero s di volte, dove s è un divisore di d . Così restano fissate anche le curve di diramazione della corrispondenza $[d, d]$ fra F' , F^d ; e si possono quindi dedurre i caratteri della seconda superficie da quelli della prima.

Le superficie F' , F^d di genere lineare $p^{(1)} = 1$ hanno il medesimo invariante di Zeuthen-Segre (corrispondendosi le C , K dotate di punto doppio), e quindi il medesimo genere numerico p_a ; esse hanno la stessa irregolarità (che è, per $p_a > -1$, il genere del fascio di curve ellittiche), e perciò lo stesso genere geometrico p_g . Ma i loro plurigeneri non sono necessariamente uguali.

Consideriamo, per semplicità, il caso delle superficie regolari

$$p_a = p_g = p.$$

Sulla F' il sistema canonico è costituito dai gruppi di $p - 1$ curve ellittiche K , senza parti fisse: quindi

$$P_i = i(p - 1) + 1.$$

Invece la F^d potrà possedere delle curve ellittiche multiple secondo numeri s (> 1) divisori di d ; ed è facile verificare che ognuna di queste

curve. θ , contata $s - 1$ volte, costituisce una parte fissa del sistema canonico, da aggiungersi alle $p - 1$ curve C variabili: si deduce, quindi,

$$P_i = i(p-1) + \sum \left[\frac{i(s-1)}{s} \right] + 1.$$

Ciò risulta dal fatto che la θ è curva di coincidenza, e non di diramazione, per la corrispondenza $[d, d]$ fra F^d, F^v ⁽¹⁾; oppure mediante la costruzione del sistema canonico di F^d , a partire da una rete contenente il fascio (C) ⁽²⁾.

La curiosa circostanza che i plurigeneri possano così assumere diversi valori in confronto al genere, è stata già segnalata nello studio dei piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$, che costituiscono le superficie regolari di determinante 2 ⁽³⁾.

Matematica. — *Sulle condizioni che definiscono assiomaticamente l'integrale.* Nota II di EMMA SCIOLETTE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Nella Nota I ho detto che il quesito relativo alla dipendenza o no della condizione VI dalle precedenti, nella definizione d'integrale data da Lebesgue ⁽⁴⁾, comprende due parti: la parte α) relativa alla delimitazione del campo delle funzioni integrabili; la parte β) relativa a una proprietà dell'operazione « integrale ».

Esaurita la questione della parte α) in favore della indipendenza, rimane da esaminare la parte β), quella che, in altri termini, afferma la formula:

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

[essendo $f(x)$ la funzione limite della successione crescente di funzioni $f_n(x)$, ciascuna integrabile] quando $f(x)$ è integrabile compatibilmente a quanto è stato detto relativamente alla parte α) della VI.

⁽¹⁾ Severi, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, in Rendiconti Istituto lombardo, ser. II, vol. XXXVI, pag. 495.

⁽²⁾ Enriques, *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche*, in Atti Accad. Torino (1901).

⁽³⁾ Enriques, *Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$* , in Rendiconti Accad. Lincei (1898).

⁽⁴⁾ Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* Paris, Gauthier-Villars, 1904, cap. XII, pag. 99.

Per l'integrale di Riemann, subito si riconosce che esso si può ricavare dalle sole condizioni I-V ⁽¹⁾. Non già che ogni operazione definita dalle I-V sia l'integrale di Riemann (perchè, come risulta da ciò che segue, le I-V definiscono un'operazione più generale); ma dalle I-V si ricava un'operazione tale che nel campo Riemanniano (cioè per le funzioni integrabili R) coincide con l'integrale di Riemann. Ora, poichè il teorema di Arzelà afferma che « ogni volta che la funzione limite è integrabile R, la formula (1) è verificata », ciò basta per dedurre che nel campo Riemanniano la parte β) della VI dipende dalle altre.

Per altro, essa potrebbe essere necessaria a definire l'integrale di Lebesgue.

Lebesgue fa risalire la teoria dell'integrazione alla teoria della misura; noi seguiremo per brevità la stessa via.

Si dimostra, infatti, in base alle prime cinque condizioni, che il problema dell'integrazione di una funzione qualunque è risoluto quando si sa integrare una funzione che assume il valore 1 nei punti di un insieme E e il valore 0 nei punti dell'insieme complementare: l'integrale di una tale funzione essendo definito come la misura dell'insieme E.

Ora i postulati dell'integrazione, tradotti in postulati della misura, dicono:

I. La misura della somma di due insiemi non aventi punti in comune è uguale alla somma delle misure.

II. La misura di un insieme è sempre ≥ 0 .

III. Trasportando rigidamente un insieme, la sua misura resta inalterata.

IV. La misura di un intervallo è uguale alla sua lunghezza.

L'ultimo postulato, equivalente alla parte β) dell'ultimo postulato dell'integrale, è il seguente:

L'insieme somma di un'infinità numerabile di insiemi (misurabili), ha per misura la somma delle misure.

⁽¹⁾ Infatti, possiamo dire brevemente così: Data la funzione $f(x)$ e considerato l'intervallo d'integrazione (a, b) diviso in tanti intervalli parziali, la proprietà IV ci dice che l'integrale di $f(x)$ in (a, b) sarà uguale alla somma degli integrali nei singoli intervalli. Ora integrando in ciascuno di questi intervalli invece della $f(x)$, una volta il limite superiore, una volta il limite inferiore, per la proprietà II, l'integrale di $f(x)$ deve essere compreso fra questi altri due integrali: questi essendo definiti dalla proprietà V.

Facendo variare in un modo qualunque la ripartizione di (a, b) il valore dell'integrale relativo al limite superiore di $f(x)$ varierà in modo da mantenersi sempre superiore a quello di $f(x)$, e l'integrale relativo al limite inferiore varierà invece in modo da mantenersi sempre inferiore a quello di $f(x)$. È chiaro che se il limite inferiore dell'integrale relativo al limite superiore di $f(x)$ è uguale al limite superiore dell'integrale relativo al limite inferiore di $f(x)$, questo limite comune sarà l'integrale di $f(x)$. È la stessa condizione d'integrabilità Riemanniana.

Allora la ricerca è ridotta a quella di vedere se ogni *misura* costruita in base ai primi quattro postulati, soddisfa necessariamente anche l'ultimo, e se quindi coincide con la misura di Jordan per gli insiemi misurabili J e con quella di Borel-Lebesgue per gli insiemi misurabili B, L .

Le mie ricerche sono relative specialmente a questo punto.

Consideriamo prima un insieme misurabile J . Le condizioni I e IV affermano che « la misura della somma di un numero finito di intervalli finiti senza punti in comune è uguale alla somma delle lunghezze »; e dalla III si ottiene che « se un insieme è contenuto in un altro, la sua misura non può essere maggiore della misura dell'altro ».

Ciò basta per poter facilmente dedurre che *la misura di un insieme misurabile J è proprio la sua misura J .*

Per un insieme misurabile B la verifica non è ugualmente facile. Affrontando anzi il quesito in generale, come per gli insiemi misurabili J , non mi è stato possibile risolverlo. Invece, prendendo a esaminare insiemi particolari (misurabili B) ho potuto ottenere (in base sempre ai primi quattro postulati) una misura che coincide con quella di Borel-Lebesgue, quindi un risultato che, se non è generale, è però sufficiente ad assicurare la dipendenza della formula (1) nei casi più notevoli.

Consideriamo l'insieme dei numeri razionali R che è un insieme misurabile B e di misura nulla e ad esso applichiamo convenientemente i primi quattro postulati della misura.

Dalle condizioni II e IV ricaviamo, chiamando $M(R)$ questa misura,

$$(2) \quad M(R) \geq 1,$$

se $(0, 1)$ è l'intervallo d'integrazione.

Mediante una traslazione di ampiezza δ incommensurabile coi numeri razionali, si possono trasportare i punti razionali $\frac{p}{q}$ sopra i punti irrazionali

nali $\frac{p}{q} + \delta$, ottenendo un insieme il quale:

a) avrà (in virtù della III) una misura uguale alla misura dell'insieme dato;

b) sarà limitato nell'intervallo $(\delta, 1 + \delta)$: o meglio, se vogliamo supporre il segmento $(0, 1)$ chiuso su sè stesso, si può dire che quelli tra i punti di R che per la traslazione esorbitano dall'intervallo $(0, 1)$ [sarebbero i punti razionali compresi nell'intervallo $(1 - \delta, 1)$] vanno ad occupare l'intervallo $(0, 0 + \delta)$ rimasto vuoto, con che il nuovo insieme rimane ancora limitato nell'intervallo $(0, 1)$;

c) non avrà nessun punto in comune con l'insieme primitivo (la ragione è ovvia).

Ciò posto, sia S_1 l'insieme somma dei due insiemi, il quale sarà ancora limitato, per quanto è stato detto, nell'intervallo $(0, 1)$.

Per la I, avremo:

$$M(S_1) = 2 M(R);$$

e, con deduzioni analoghe a quelle per cui si è scritta la (2),

$$(3) \quad 2 M(R) \leq 1.$$

Questa costruzione di un insieme uguale all'insieme dato R si può ripetere in un'infinità numerabile di modi differenti, prendendo l'ampiezza di traslazione δ uguale successivamente ai valori $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$, ciascuno dei quali sia irrazionale e quindi incommensurabile coi numeri razionali; non solo ma bensì sia incommensurabile con tutti i valori δ di rango inferiore. Con ciò si viene a costruire un'infinità numerabile di insiemi R_1, R_2, R_3, \dots ciascuno dei quali gode della proprietà *a*), *b*), *c*) rispetto all'insieme dato R e rispetto a tutti gli altri insiemi costruiti.

Sia ora S_n l'insieme somma degli n insiemi $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$, il quale sarà ancora limitato in $(0, 1)$. Si può scrivere la relazione analoga alla (2) e alla (3):

$$(4) \quad M(R) \cdot n \leq 1.$$

Essendo questa formula vera per qualunque valore di n crescente deve necessariamente essere

$$(5) \quad M(R) = 0.$$

Dunque, per l'insieme dei numeri razionali la misura Borel-Lebesgue è definita dai primi quattro postulati, l'ultimo risultando quindi come conseguenza dei precedenti.

Ma si può dire anche di più.

Sia Ω un qualunque insieme numerabile di punti

$$e_1, e_2, e_3, \dots$$

e indichiamo con $d_{p,q}$ la distanza di un qualunque elemento e_p da un altro qualunque elemento e_q . Queste distanze sono tante quante sono le coppie (e_p, e_q) : quindi formano un insieme numerabile. Allora si può scegliere un numero reale δ_1 diverso da ogni $d_{p,q}$, e imprimere a Ω la traslazione δ_1 , (anche questa volta operando sull'intervallo $(0,1)$ considerato come chiuso su sè stesso) ottenendo un insieme Ω' che soddisferà evidentemente alle condizioni *a*), *b*) e *c*).

Chiamiamo ancora S_1 l'insieme somma di Ω con Ω' ; essendo anche questo insieme numerabile, saranno numerabili anche le mutue distanze $d'_{p,q}$ di due qualunque dei suoi elementi.

Scegliendo un δ_2 diverso da ogni $d'_{p,q}$ e imprimendo a S_1 la traslazione δ_2 , si otterrà un insieme S'_1 che godrà anch'esso delle proprietà $a)$, $b)$ e $c)$ rispetto all'insieme S_1 . Chiamiamo S_2 l'insieme somma di S_1 con S'_1 , e procediamo in modo analogo alla costruzione degli insiemi $S_3, S_4 \dots$

Avremo le formule:

$$\begin{aligned} M(\Omega) &\leq 1 \\ M(S_1) &= 2 M(\Omega) \leq 1 \\ M(S_2) &= 2 M(S_1) = 4 M(\Omega) \leq 1 \\ &\dots \dots \dots \\ M(S_n) &= 2^n M(\Omega) \leq 1. \end{aligned}$$

L'ultima di queste formule dimostra, anche in questo caso di un insieme numerabile qualunque, che la misura è nulla e che coincide quindi con quella di Borel-Lebesgue.

Questo risultato, in virtù della I, si estende immediatamente anche agli insiemi che sono complementari di insiemi numerabili.

Onde, conchiudendo, si può dire:

« La parte $\beta)$ della condizione VI è *dipendente* dalle altre non solo « tutte le volte che si tratta di integrale di Riemann, ma anche quando, « fuori del campo Riemanniano, le funzioni da integrare hanno per insiemi « associati (chiamando così quegli insiemi dalla cui misura discende l'integrale) insiemi misurabili J, o insiemi numerabili, o insiemi complementari di insiemi numerabili, essendo la misura di tali insiemi univocamente definite dai primi quattro postulati ».

Terminiamo citando, come esempio di integrale così definito, l'integrale della funzione di Dirichlet che assume il valore 0 in tutti i punti irrazionali e il valore 1 in tutti i punti razionali.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm.* Nota I di CARLO SEVERINI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Profittando di alcune considerazioni, svolte in una mia recente Nota ⁽¹⁾, si può, data un'equazione integrale di prima specie

$$(1) \quad \int_a^b K(x, y) F(y) dy = f(x),$$

in cui $K(x, y)$ ed $f(x)$ sono funzioni note continue ⁽²⁾, e per la quale esista almeno una soluzione $F(y)$, sommabile insieme col suo quadrato, costruire una funzione

$$(2) \quad \Phi(x, g(x)),$$

definita *quasi da per tutto* ⁽³⁾ nell'intervallo (a, b) , dipendente da una funzione arbitraria $g(x)$, sommabile insieme col suo quadrato, in modo che, comunque si assegni $g(x)$, la (2) rappresenti una soluzione della (1), sommabile insieme col suo quadrato, e che, inversamente, ogni soluzione così fatta sia dalla (2) rappresentata per una conveniente scelta della $g(x)$ medesima.

Indicando con

$$(3) \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$$

la successione delle costanti del nucleo $K(x, y)$, e con

$$(4) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

$$(5) \quad \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots,$$

la successione delle coppie di funzioni ortogonali dello stesso nucleo, per le quali risultano soddisfatte le equazioni coniugate, simultanee,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int_a^b K(x, y) \psi(y) dy \\ \psi(x) &= \lambda \int_a^b K(y, x) \varphi(y) dy \quad (4), \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXVI, 2° semestre 1913.

⁽²⁾ L'ipotesi che le funzioni $K(x, y)$ ed $f(x)$ siano continue, potrebbe sostituirsi con altre più generali.

⁽³⁾ Dicendo *quasi da per tutto*, intendiamo, come si suole da vari autori, che possano, al più, fare eccezione i punti di un insieme di misura nulla. Da tali insiemi si farà generalmente astrazione, considerandosi come identiche due funzioni eguali quasi da per tutto. In questo senso sono talvolta da riguardare le eguaglianze, che seguono nel testo.

⁽⁴⁾ Cfr. E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, Mathematische Annalen, Bd. LXIII (1906), Heft. 4, pag. 461.

condizione necessaria e sufficiente, affinchè la soluzione della (1) sia unica, è che sia chiuso il sistema delle funzioni ortogonali (5). In tal caso la (2) risulta indipendente dalla $g(x)$, e, per rappresentare l'unica soluzione, conviene in particolare porre $g(x) = 0$, con che la (2) assume la forma più semplice.

Della costruzione della (2), che può ben dirsi rappresenti la *soluzione generale* dell'equazione (1), mi propongo di occuparmi in questa Nota.

1. È noto ⁽⁵⁾ che, se il sistema delle funzioni ortogonali (4) è chiuso, condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione (1) ammetta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, è che converga la serie

$$(6) \quad \sum_n \lambda_n^2 a_n^2, \quad a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx.$$

È noto ancora ⁽⁶⁾, che, se il sistema delle funzioni ortogonali (4) non è chiuso, affinchè l'equazione (1) ammetta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, è necessario e sufficiente che converga la serie (6), e che, di più, si abbia:

$$(7) \quad f(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x), \quad a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx.$$

Delle due condizioni contemplate in quest'ultimo teorema, la seconda è una conseguenza della prima, se il sistema delle funzioni ortogonali (4) è chiuso: giacchè, tenuto conto delle eguaglianze,

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, y) \psi_n(y) dy \\ \psi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(y, x) \varphi_n(y) dy, \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

dalla convergenza della (6) segue, per un noto teorema di Schmidt ⁽⁷⁾, la convergenza assoluta ed uniforme della serie $\sum_n a_n \varphi_n(x)$, e quindi la (7) ⁽⁸⁾.

Il primo teorema è pertanto contenuto nel secondo, del quale solo conviene che ci occupiamo.

⁽⁵⁾ Cfr. E. Picard, *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXIX (1910), pag. 79, § 4.

⁽⁶⁾ Cfr. G. Lauricella, *Sull'equazione integrale di prima specie*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. XVIII, ser. 5^a, 2^o sem., fasc. 3^o (1909), § 2.

⁽⁷⁾ Cfr. E. Schmidt, loc. cit. ⁽⁴⁾, § 2.

⁽⁸⁾ Cfr. C. Severini, *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania, serie V, vol. III (1910), Memoria XI, § 5.

Posto che l'equazione (1) ammetta una soluzione $F(y)$, sommabile insieme col suo quadrato, si ha (*):

$$a_n = \int_a^b f(x) g_n(x) dx = \int_a^b \int_a^b K(x, y) F(y) g_n(x) dx dy \quad (n = 1, 2, \dots),$$

e, per la seconda delle (8),

$$\lambda_n a_n = \int_a^b F(y) \psi_n(y) dy \quad (n = 1, 2, \dots),$$

donde, coincidendo le quantità $\lambda_n a_n$ coi coefficienti di Fourier della $F(y)$ rispetto al sistema delle funzioni ortogonali (5), segue la convergenza della serie (6). Inoltre, per un noto teorema di Schmidt (10), deve sussistere la (7).

Inversamente, poichè

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{m+p} \lambda_n a_n \psi_n(x) \right]^2 dx = \sum_{n=1}^{m+p} \lambda_n^2 a_n^2,$$

dalla convergenza della (6) si deduce che la successione

$$(9) \quad S_m(x) = \sum_{n=1}^m \lambda_n a_n \psi_n(x) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

converge in media nell'intervallo (a, b) , ed esiste quindi una funzione $F_1(x)$, sommabile insieme col suo quadrato, unica e ben determinata, se si eccettuino i punti di un insieme di misura nulla, per la quale si ha:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \left[F_1(x) - \sum_{n=1}^m \lambda_n a_n \psi_n(x) \right]^2 dx = 0 \quad (11).$$

Se ne deduce, applicando la disuguaglianza di Schwarz:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b K(x, y) \left[F_1(y) - \sum_{n=1}^m \lambda_n a_n \psi_n(y) \right] dy = 0,$$

cioè

$$\int_a^b K(x, y) F_1(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \int_a^b K(x, y) \psi_n(y) dy,$$

(*) Cfr. E. Picard, loc. cit. (*), § 5.

(10) Cfr. E. Schmidt, loc. cit. (*), § 16.

(11) Cfr. E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (Paris), tome CXLIV, 1^{er} sem. 1907, pp. 1022-1024. Cfr. anche H. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten*, Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 225-245; F. Riesz, *Ueber orthogonale Funktionensysteme*, Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematische-physikalische Klasse, Jahrgang, 1907, pp. 116-122.

e, per le (8),

$$\int_a^b K(x, y) F_1(y) dy = \sum_n a_n \varphi_n(x),$$

donde, se è verificata la (7), risulta in fine:

$$\int_a^b K(x, y) F_1(y) dy = f(x).$$

2. Poichè, come è stato dianzi osservato, dalla convergenza della (6) segue la convergenza assoluta ed uniforme della serie $\sum_n a_n \varphi_n(x)$, la condizione espressa dalla (7) può sostituirsi coll'altra che sia

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=1}^m a_n \varphi_n(x) \right]^2 dx = 0,$$

cioè

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = \sum_n a_n^2 \quad (1^2).$$

Si ha così il teorema:

Affinchè l'equazione (1) ammetta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, è necessario e sufficiente che converga la serie (6), e che la $f(x)$ soddisfi all'equazione di chiusura del sistema delle funzioni ortogonali (4):

$$(10) \quad \int_a^b [f(x)]^2 dx = \sum_n a_n^2, \quad a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx.$$

Ancora, se si ricorda ⁽¹³⁾ che la condizione espressa dalla (10) equivale all'altra che si abbia:

$$(11) \quad \int_a^b f(x) \theta(x) dx = 0,$$

per ogni soluzione effettiva delle equazioni integrali

$$(12) \quad \int_a^b \theta(x) \varphi_n(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

può dirsi ⁽¹⁴⁾:

Condizione necessaria e sufficiente, affinché l'equazione (1) ammetta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, è che converga la serie (6), e risulti verificata la (11), per ogni soluzione effettiva delle equazioni integrali (12).

⁽¹³⁾ Cfr. C. Severini, loc. cit. ⁽⁸⁾, § 3.

⁽¹²⁾ Cfr. G. Lauricella, *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXIX, 1° sem. 1910, pp. 155-163, §§ 2. 3.

⁽¹⁴⁾ Cfr. G. Lauricella, loc. cit. ⁽⁸⁾, § 3.

3. Della soluzione $F_1(x)$, alla quale, nelle ipotesi sopra dette, converge in media la (9), può darsi una rappresentazione analitica, mediante la serie ⁽¹⁵⁾

$$(13) \quad U_1(x) + \sum_v [U_{v+1}(x) - U_v(x)],$$

ove

$$U_v(x) = \sum_n \frac{\lambda_n a_n}{2h_v} \int_{x-h_v}^{x+h_v} \psi_n(x) dx \quad (v = 1, 2, \dots),$$

e

$$(14) \quad h_1, h_2, \dots, h_v, \dots$$

è una successione, comunque scelta, di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero.

Inoltre, essendo $g(x)$ una funzione qualsivoglia, sommabile insieme col suo quadrato, la serie

$$(15) \quad G(x) = g(x) - V_1(x) - \sum_v [V_{v+1}(x) - V_v(x)],$$

ove

$$V_v(x) = \sum_n \frac{b_n}{2h_v} \int_{x-h_v}^{x+h_v} \psi_n(x) dx \quad , \quad b_n = \int_a^b g(x) \psi_n(x) dx,$$

se non è (quasi da per tutto) eguale a zero nell'intervallo (a, b) , rappresenta una soluzione effettiva delle equazioni integrali

$$(16) \quad \int_a^b \eta(x) \psi_n(x) dx = 0 \quad (16) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

cioè dell'equazione

$$(17) \quad \int_a^b K(x, y) \eta(y) dy = 0 \quad (17),$$

e, aggiunta alla $F_1(x)$, fornisce una nuova soluzione $F_1(x) + G(x)$ della (1).

Importa notare che la funzione $G(x)$ non dipende dalla scelta della (14), che cioè, considerando un'altra successione di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero,

$$h'_1, h'_2, \dots, h'_v, \dots,$$

e ponendo

$$G'(x) = g(x) - V'_1(x) - \sum_v [V'_{v+1}(x) - V'_v(x)],$$

ove

$$V'_v(x) = \sum_n \frac{b_n}{2h'_v} \int_{x-h'_v}^{x+h'_v} \psi_n(x) dx \quad , \quad b_n = \int_a^b g(x) \psi_n(x) dx,$$

⁽¹⁵⁾ Cfr. C. Severini, loc. cit. (1), § 5.

⁽¹⁶⁾ Cfr. C. Severini, loc. cit. (1), § 9.

⁽¹⁷⁾ Cfr. E. Schmidt, loc. cit. (*) § 16.

risulta:

$$G(x) = G'(x) \quad (18).$$

Se $g(x)$ è essa stessa una soluzione delle equazioni integrali (16), si ha:

$$G(x) = g(x),$$

essendo allora:

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots);$$

ed infine, se il sistema delle funzioni ortogonali (5) è chiuso, nel qual caso la (1) ammette un'unica soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, risulta sempre:

$$G(x) = 0.$$

All'equazione (1) soddisfa pertanto in ogni caso, comunque si scelga $g(x)$, la

$$(18) \quad F_1(x) + G(x),$$

ed è evidente che così si ottengono tutte le soluzioni della (1), sommabili insieme coi loro quadrati.

La (18) rappresenta dunque la *soluzione generale* della (1), e si può enunciare il seguente teorema:

Quando sono soddisfatte le condizioni occorrenti, indicate nei teoremi sopra enunciati (§§ 1, 2), la soluzione generale dell'equazione (1) è rappresentata dalla serie

$$(19) \quad g(x) + W_1(x) + \sum_v [W_{v+1}(x) - W_v(x)],$$

ove

$$W_v(x) = \sum_n \frac{\lambda_n a_n - b_n}{2h_v} \int_{x-h_v}^{x+h_v} \psi_n(x) dx,$$

$$a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad b_n = \int_a^b g(x) \psi_n(x) dx,$$

$g(x)$ essendo una funzione arbitraria, sommabile insieme col suo quadrato, ed

$$h_1, h_2, \dots, h_v, \dots$$

una successione, comunque scelta, di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero ⁽¹⁹⁾.

4. La (19) si semplifica, se la serie $\sum_n \lambda_n a_n \psi_n(x)$ converge (quasi da per tutto) nell'intervallo (a, b) . Notevole è il seguente corollario ⁽²⁰⁾:

⁽¹⁸⁾ Cfr. C. Severini, loc. cit. (1), § 5.

⁽¹⁹⁾ Cfr. G. Lauricella, *Sopra alcune equazioni integrali*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. XVII, serie 5^a, 1° sem., fasc. 12 (1908), § 6₁.

⁽²⁰⁾ Cfr. G. Lauricella, loc. cit. 19), § 4₁.

Sotto le condizioni indicate nei teoremi enunciati in principio (SS 1, 2), la serie $\sum_n \lambda_n a_n \psi_n(x)$, supposta convergente (quasi da per tutto) nell'intervallo (a, b) , rappresenta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, dell'equazione (1); è in particolare l'unica soluzione, se il sistema delle funzioni ortogonali (5) è chiuso.

Meccanica. — *Esperienze sulla elasticità a trazione del rame.* Nota II di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Nel terminare la mia Nota precedente su questo argomento ⁽¹⁾ ho accennato all'incrudimento che si verifica in un filo di rame il quale venga per la prima volta cimentato a trazione, ed al conseguente diverso comportamento che esso presenta se si ripetono, in successo di tempo, le medesime condizioni di carico.

Ho cercato allora di chiarire la natura di questo fenomeno riproducendo, a lato del diagramma che rappresenta l'andamento delle esperienze ivi descritte, un altro diagramma relativo ad alcune esperienze da me eseguite negli ultimi giorni dello scorso dicembre rinnovando identicamente sul medesimo spezzone le condizioni di carico già realizzate la prima volta nei giorni 15 e 16 del precedente febbraio. A più completa documentazione del caratteristico confronto, credo non inutile riportare ora, nella prima tabella qui allegata, i risultati così ottenuti, insieme con pochi altri i quali si riferiscono ad un ciclo di deformazione osservato facendo variare periodicamente il carico applicato allo stesso spezzone fra un massimo di 1200 ed un minimo di 200 kgr.

Tale ciclo (che si trova rappresentato, in scala maggiore di quella usata l'altra volta, nella fig. 1, insieme colle due linee di ascesa da 0 a 1200 kgr. e di discesa da 200 a 0, le quali valgono a precisarne la posizione rispetto agli assi coordinati) si è rivelato notevolmente stabile: si è potuto infatti descriverlo più volte di seguito senza che si ottenessero, da una volta all'altra, differenze sensibili nelle singole letture: non solo, ma si è potuto anche assodare che le curve di deformazione relative a variazioni cicliche della forza applicata non oltrepassanti i limiti di esso constavano di cicli alla lor volta chiusi e tutti contenuti nell'interno del primo.

Questa proprietà, che mi si è ripetutamente presentata come caratteristica dei cicli chiusi, può venire meglio precisata se messa in relazione

⁽¹⁾ Presentata, per la pubblicazione in questi Rendiconti, nella seduta del 1° febbraio 1914.*

con alcune altre osservazioni che io avevo avuto, poco tempo innanzi, occasione di fare operando su di un altro spezzone del solito filo.

Questo era stato assoggettato ad un carico che, raggiunti in pochi minuti i 2500 kgr., si era poi mantenuto sensibilmente costante per circa 60 ore consecutive: dopo averlo lasciato, circa altrettanto, sotto l'azione di un carico di soli 200 kgr., io potei constatare, in una prova preliminare

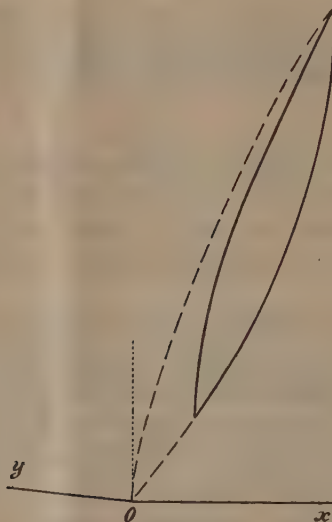


FIG. 1.

eseguita il 24 novembre, che un incremento transitorio di 1000 kgr. nell'intensità dello sforzo applicato non lasciava traccia alcuna di deformazioni residue. Il ciclo di deformazione, corrispondente al passaggio del carico da 200 a 1200 kgr. e viceversa, venne rilevato con ogni cura il giorno seguente insieme con due altri cicli di minore ampiezza, corrispondenti rispettivamente a carichi varianti tra 200 ed 800 kgr. e tra 1200 e 600. Le osservazioni fatte in quell'occasione (rappresentate col solito metodo nella fig. 2), insieme con quelle eseguite il 26 novembre intercalando (come è indicato nella fig. 3) nel solito ciclo di massima ampiezza varii piccoli cicli corrispondenti a variazioni di soli 100 kgr. di sforzo, si trovano dettagliatamente riferite nella tabella riprodotta alla fine di questa Nota.

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	SPECCHIO SINISTRO		SPECCHIO DESTRO		Somma delle differenze parziali	Deforma- zione totale	Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali			
30 dicembre	15	0	853	—	1489	—	—	0	—
"		100	960	+ 107	1620	+ 131	+ 238	238	+ 2.38
"		200	1079	+ 119	1742	+ 122	+ 241	479	+ 2.41
"		400	1308	+ 229	2000	+ 258	+ 487	966	+ 2.43
"		600	1536	+ 228	2259	+ 259	+ 487	1453	+ 2.44
"		800	1768	+ 232	2520	+ 261	+ 493	1946	+ 2.46
"		1000	2001	+ 233	2780	+ 260	+ 493	2439	+ 2.47
"		900	1886	— 115	2664	— 116	— 231	2208	— 2.31
"		800	1777	— 109	2539	— 125	— 234	1974	— 2.34
"		600	1552	— 225	2284	— 255	— 480	1494	— 2.40
"		400	1327	— 225	2021	— 263	— 488	1006	— 2.44
"		200	1100	— 227	1749	— 272	— 499	507	— 2.49
"		0	855	— 245	1485	— 264	— 509	— 2	— 2.55
31	10	0	850	— 5	1490	+ 5	0	— 2	—
"		100	957	+ 107	1621	+ 131	+ 238	236	+ 2.38
"		200	1073	+ 116	1748	+ 127	+ 243	479	+ 2.43
"		400	1300	+ 227	2008	+ 260	+ 487	966	+ 2.44
"		600	1530	+ 230	2268	+ 260	+ 490	1456	+ 2.45
"		800	1764	+ 234	2526	+ 258	+ 492	1948	+ 2.46
"		1000	1998	+ 234	2784	+ 253	+ 492	2440	+ 2.46
"		1200	2238	+ 240	3046	+ 262	+ 502	2942	+ 2.51
"		1400	2480	+ 242	3310	+ 264	+ 506	3448	+ 2.53
"		1600	2726	+ 246	3575	+ 265	+ 511	3959	+ 2.55
"		1500	2608	— 118	3462	— 113	— 231	3728	2.31
"		1400	2499	— 109	3335	— 127	— 236	3492	— 2.36
"		1200	2264	— 235	3091	— 244	— 479	3013	— 2.39
"		1000	2032	— 232	2838	— 253	— 485	2528	— 2.42
"		800	1801	— 231	2581	— 257	— 488	2040	— 2.14
"		600	1570	— 231	2322	— 259	— 490	1550	— 2.45
"		400	1340	— 230	2058	— 264	— 494	1056	— 2.47
"		200	1111	— 229	1781	— 277	— 506	550	— 2.53
"		0	860	— 251	1500	— 281	— 532	18	— 2.66
"	14 1/2	0	850	— 10	1492	— 8	— 18	0	—
"		1200	2242	—	3041	—	—	2941	—
"		1100	2124	— 118	2928	— 113	— 231	2710	— 2.31
"		1000	2013	— 111	2799	— 129	— 240	2470	— 2.40
"		800	1782	— 231	2549	— 250	— 481	1989	— 2.41
"		600	1554	— 228	2290	— 259	— 487	1502	— 2.43

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	SPECCHIO SINISTRO		SPECCHIO DESTRO		Somma delle differenze parziali	Deforma- zione totale	Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali			
31 dicembre		400	1327	— 227	2027	— 263	— 490	1012	— 2.45
"		200	1098	— 229	1752	— 275	— 504	508	— 2.52
"		300	1206	+ 108	1880	+ 128	+ 236	744	+ 2.36
"		400	1319	+ 113	2007	+ 127	+ 240	984	+ 2.40
"		600	1540	+ 221	2267	+ 260	+ 481	1465	+ 2.41
"		800	1779	+ 239	2519	+ 252	+ 491	1956	+ 2.45
"		1000	2012	+ 233	2779	+ 260	+ 493	2449	+ 2.46
"		1200	2249	+ 237	3035	+ 256	+ 493	2942	+ 2.47
"		0	850	—	1488	—	—	— 4	—

Esse provano, in modo costante ed affatto generale, che ogni linea di deformazione che parte da un punto di regresso tende a chiudere il ciclo



FIG. 1.

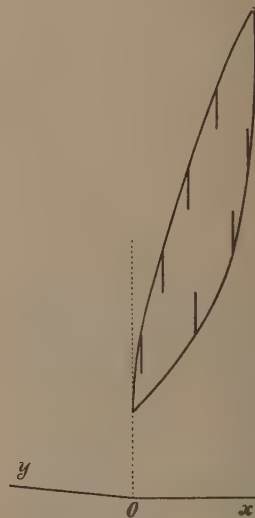


FIG. 2.

prolungandosi fino al punto di regresso immediatamente precedente: le linee discendenti rimanendo in ogni caso tutte al di sotto della ascendente precedentemente seguita, le ascendenti tutte al disopra della discendente precedentemente seguita. In particolare, esse mettono in rilievo la diversa legge di deformazione di un corpo il quale, sottoposto all'azione di un dato carico,

risenta l'impulso di una nuova forza, a seconda che la variazione attuale del carico riesca dello stesso segno di quella che l'ha immediatamente preceduta ovvero di segno contrario, avendosi in questo caso una variazione di dimensioni più piccola che nel primo, ed accentuandosi la differenza col crescere dell'ampiezza della variazione precedente: dove bisogna però tener presente che sono da considerarsi come non avvenute tutte quelle variazioni di carico che, separatamente o nel loro complesso, hanno carattere ciclico in quanto esse, a ciclo compiuto, lasciano il materiale nelle condizioni in cui l'hanno trovato.

Ma mentre il modo di deformarsi del materiale si mostra così strettamente legato alla legge seguita nell'applicazione del carico, esso si presenta poi praticamente indipendente dalla intensità del carico stesso se si ha l'avvertenza di mettersi ai diversi carichi in condizioni analoghe eseguendo le misure immediatamente dopo aver invertito il senso di variazione delle forze. Le differenze tra i vari valori del modulo di elasticità rilevati immediatamente appresso ad ogni punto di regresso si mantengono infatti, in queste esperienze, entro limiti così ristretti ⁽¹⁾ da far pensare alla possibilità di assumere, almeno in via di approssimazione, quel modulo così valutato come una costante caratteristica del materiale.

Quel che è certo si è che il fenomeno della deformazione del rame, in generale così profondamente discorde dalle ipotesi della teoria dell'elasticità, si presenta ad esse ipotesi praticamente conforme sempre e soltanto quando si descrivano cicli di piccolissima ampiezza attorno ad un valore, entro certi limiti, affatto qualunque del carico.

(1) Ed invero in 26 misure eseguite, sotto carichi diversi, ma tutte immediatamente appresso ad una inversione nel senso di variazione del carico, nelle esperienze del 25 e 26 novembre, si sono ottenuti valori dell'incremento della deformazione per unità di incremento dello sforzo tra il massimo ed il minimo dei quali intercede una differenza del 2% soltanto; la differenza tra i due valori dello stesso incremento misurati in corrispondenza del vertice inferiore del solito ciclo di massima ampiezza rispettivamente all'inizio della linea ascendente ed al termine della linea discendente che lo compongono supera invece, in valor relativo, il 7%.

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	SPECCHIO SINISTRO		SPECCHIO DESTRO		Somma delle differenze parziali	Deforma- zione totale	Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali			
24 novembre	16	200
"		1200
"		200
25	11	200	315	—	1890	—	—	0	—
"		300	444	+ 129	2008	+ 118	+ 247	247	+ 2.47
"		400	574	+ 130	2130	+ 122	+ 252	499	+ 2.52
"		600	831	+ 257	2379	+ 249	+ 506	1005	+ 2.53
"		800	1087	+ 256	2630	+ 251	+ 507	1512	+ 2.54
"		700	961	— 126	2510	— 120	— 246	1266	— 2.46
"		600	837	— 124	2386	— 124	— 248	1018	— 2.48
"		400	579	— 258	2136	— 250	— 508	510	— 2.54
"		200	317	— 262	1886	— 250	— 512	— 2	— 2.56
"	14	200	317	0	1886	0	0	— 2	—
"		300	447	+ 130	2004	+ 118	+ 248	246	+ 2.48
"		400	576	+ 129	2128	+ 124	+ 253	499	+ 2.53
"		600	834	+ 258	2377	+ 249	+ 507	1006	+ 2.53
"		800	1090	+ 256	2629	+ 252	+ 508	1514	+ 2.54
"		1000	1344	+ 254	2883	+ 254	+ 508	2022	+ 2.54
"		1200	1603	+ 259	3140	+ 257	+ 516	2538	+ 2.58
"		1100	1479	— 124	3020	— 120	— 244	2294	— 2.44
"		1000	1353	— 126	2900	— 120	— 246	2048	— 2.46
"		800	1101	— 252	2652	— 248	— 500	1548	— 2.50
"		600	847	— 254	2402	— 250	— 504	1044	— 2.52
"		400	585	— 262	2150	— 252	— 514	530	— 2.57
"		200	317	— 268	1891	— 259	— 527	3	— 2.64
"	16 ^{1/2}	200	317	0	1891	0	0	3	—
"		300	447	+ 130	2010	+ 119	+ 249	252	+ 2.49
"		400	577	+ 130	2133	+ 123	+ 253	505	+ 2.53
"		600	834	+ 257	2382	+ 249	+ 506	1011	+ 2.53
"		800	1089	+ 255	2633	+ 251	+ 506	1517	+ 2.53
"		1000	1343	+ 254	2887	+ 254	+ 508	2025	+ 2.54
"		1200	1601	+ 258	3143	+ 256	+ 514	2539	+ 2.57
"		1100	1476	— 125	3023	— 120	— 245	2294	— 2.45
"		1000	1350	— 126	2902	— 121	— 247	2047	— 2.47
"		800	1097	— 253	2658	— 244	— 497	1550	— 2.49
"		600	843	— 254	2408	— 250	— 504	1046	— 2.52
"		700	967	+ 124	2529	+ 121	+ 245	1291	+ 2.45
"		800	1093	+ 126	2650	+ 121	+ 247	1538	+ 2.47

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	SPECCHIO SINISTRO		SPECCHIO DESTRO		Somma della differenze parziali	Deforma- zione totale	Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali			
25 novembre		1000	1346	+ 253	2897	+ 247	+ 500	2038	+ 2.50
"		1200	1600	+ 254	3145	+ 248	+ 502	2540	+ 2.51
"		1100	1471	- 129	3030	- 115	- 244	2296	- 2.44
"		1000	1349	- 122	2907	- 123	- 245	2051	- 2.45
"		800	1098	- 251	2661	- 246	- 497	1554	- 2.49
"		600	844	- 254	2410	- 251	- 505	1049	- 2.53
"		400	583	- 261	2155	- 255	- 516	533	- 2.53
"		200	312	- 271	1894	- 261	- 532	1	- 2.66
26	9	200	312	0	1890	- 4	- 4	- 3	-
"		300	442	+ 130	2008	+ 118	+ 248	245	+ 2.48
"		400	573	+ 131	2031	+ 123	+ 254	499	+ 2.54
"		300	446	- 127	2010	- 121	- 248	251	- 2.48
"		400	573	+ 127	2030	+ 120	+ 247	498	+ 2.47
"		600	832	+ 259	2378	+ 248	+ 507	1005	+ 2.54
"		500	706	- 126	2257	- 121	- 247	758	- 2.47
"		600	832	+ 126	2378	+ 121	+ 247	1005	+ 2.47
"		800	1088	+ 256	2630	+ 252	+ 508	1513	+ 2.54
"		700	962	- 126	2511	- 119	- 245	1268	- 2.45
"		800	1088	+ 126	2632	+ 121	+ 247	1515	+ 2.47
"		1000	1346	+ 258	2884	+ 252	+ 510	2025	+ 2.55
"		900	1218	- 128	2767	- 117	- 245	1780	- 2.45
"		1000	1343	+ 125	2889	+ 122	+ 247	2027	+ 2.47
"		1200	1603	+ 260	3143	+ 254	+ 514	2541	+ 2.57
"		1100	1475	- 128	3026	- 117	- 245	2296	- 2.45
"		1000	1352	- 123	2902	- 124	- 247	2049	- 2.47
"		1100	1477	+ 125	3023	+ 121	+ 246	2295	+ 2.46
"		1000	1353	- 124	2902	- 121	- 245	2050	- 2.45
"		800	1100	- 253	2656	- 246	- 499	1551	- 2.49
"		900	1223	+ 123	2779	+ 123	+ 246	1797	+ 2.46
"		800	1100	- 123	2657	- 122	- 245	1552	- 2.45
"		600	847	- 253	2408	- 249	- 502	1050	- 2.51
"		700	971	+ 124	2529	+ 121	+ 245	1295	+ 2.45
"		600	847	- 124	2406	- 123	- 247	1048	- 2.47
"		400	587	- 260	2153	- 253	- 513	535	- 2.56
"		500	713	+ 126	2273	+ 120	+ 246	781	+ 2.46
"		400	587	- 127	2152	- 121	- 248	533	- 2.48
"		200	316	- 270	1890	- 262	- 532	1	- 2.66
"	17 1/2	200	311	- 5	1892	+ 2	- 3	- 2	-

Matematica. — *Sopra un sistema di equazioni alle derivate parziali che ammettono un teorema nella media.* Nota di LUIGI AMOROSO, presentata dal Corrisp. E. ALMANSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sull'uso dei reticoli concavi di diffrazione con lo spettrometro.* Nota I di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Avendo da molto tempo acquistato un buon reticolo di Rowland, concavo, di 3 metri di raggio di curvatura, dovetti lungamente contentarmi di usarlo come strumento di dimostrazione e non di misura, perchè nè i mezzi, nè il locale di cui potevo disporre mi consentivano nè di acquistare nè di usare, qualora l'avessi acquistato, l'apparecchio completo di Rowland.

Inoltre, avendo recentemente eseguito misure dello spostamento che subiscono le righe dei vari spettri quando varia la temperatura, e quindi varia la distanza delle righe del reticolo, nel ricercare le condizioni e gli spettri che meglio si prestavano a queste misure ebbi da incontrare non poche difficoltà, sia nello stabilire per tentativi quelle esatte condizioni che si ottengono meccanicamente coll'apparecchio del Rowland, sia perchè ad ogni nuova disposizione ero costretto a spostar mobili e strumenti per far posto all'oculare e all'osservatore, e, ciò nonostante, l'oculare capitava spesso in posizioni tali da render l'osservazione molto incomoda e, perciò, facilmente meno esatta.

Ricorsi finalmente ad una disposizione, che può presentare bensì qualche inconveniente, ma che è pochissimo ingombrante, facile ad effettuare e che dà modo di facilmente osservare e determinare la posizione delle righe di tutti gli spettri di vario ordine; essa perciò potrà riuscire utile quando, come nel mio caso, i mezzi o il locale non consentano assolutamente l'uso del reticolo di Rowland.

La nota condizione essenziale, cui è necessario o molto utile il soddisfare, è che il punto medio R del reticolo ARB (che si suppone abbia le righe perpendicolari al piano della figura), e quello F della fessura, si trovino sopra una circonferenza descritta sul raggio di curvatura $RC_R = R$ del reticolo come diametro. Se questa condizione è soddisfatta, tutti gli spettri di vario ordine si formeranno su questa circonferenza, e sarà facile di collocare l'oculare o la pellicola fotografica per l'osservazione o la riproduzione di uno qualsiasi di essi; se la stessa condizione, invece, non è soddisfatta, gli

spettri si formeranno lungo una curva d'ordine superiore, non facilmente tracciabile, e la forma della pellicola, e la sua posizione, o quella dell'oculare dovranno esser trovate, caso per caso, per tentativi; inoltre, fors'anche gli spettri riusciranno meno nitidi.

Per soddisfare a tale condizione, ho usato un metodo che essenzialmente non differisce da quello già descritto ed usato dal Waterhouse e che trovasi citato dal Kayser nello *Handbuch der Spectroscopie*, Bd. 1. Il punto medio R del reticolo, quello F della fessura ed il centro C della suddetta circonferenza, formavano i vertici articolati, cioè ad angolo variabile, d'un

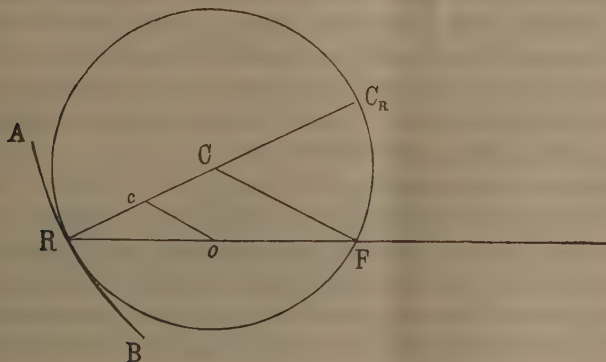


FIG. 1.

triangolo RCF, di cui due lati RC ed FC avevano una lunghezza costante uguale al raggio della stessa circonferenza, mentre il 3° lato RF aveva una lunghezza variabile, colla posizione della fessura F, e (per comodità) una direzione costante. Waterhouse collocava la pellicola fotografica in C_R all'estremità d'un lungo regolo RC_R , e fotografava così lo spettro normale.

Ho creduto più conveniente, per lo scopo che mi ero prefisso e per le condizioni in cui operavo, di osservare invece (e, occorrendo, fotografare) lo spettro rv , che, per una conveniente posizione della fessura e per la corrispondente orientazione del reticolo, è prodotto nel piano della fessura stessa o, più esattamente, sulla superficie cilindrica di raggio $R/2$ ad esso tangente, con raggi luminosi aventi, in media, la stessa direzione dei raggi incidenti. L'oculare o la pellicola devono esser fissati alla fessura (allato, o un po' al disopra): e per osservare o ricevere sulla pellicola i diversi spettri, non occorre altro che far scorrere essa fessura lungo RF.

Così le dimensioni dell'apparecchio sono ridotte a quelle del triangolo RCF, ed inoltre è possibile d'osservare spettri d'un ordine più elevato che non con qualsiasi altra disposizione. Difatti, essendo

$$(1) \quad \sin i + \sin e = m\lambda/s$$

la condizione cui devono soddisfare gli angoli i ed e d'incidenza e d'emergenza dei raggi, l'ordine m degli spettri, la lunghezza d'onda λ , e la lunghezza s d'un elemento, essa, per il caso solito di $e = 0$, diventa $\sin i = m\lambda/s \leq 1$, quindi $m < s/\lambda$; mentre, invece per $i = e$, la stessa condizione diviene $2 \sin i = m\lambda/s \leq 2$, quindi $m \leq 2s/m$. Si ha però l'inconveniente che gli spettri sono obliqui, (più o meno secondo l'ordine), spettri rispetto ai raggi che li formano; quindi, anzitutto, essi non sono normali, cioè la distanza de di due righe nella riproduzione fotografica non è proporzionale a $d\lambda$ ma bensì a $md\lambda/2s \cos e$ variabile con e .

Si può ridurre normale questo spettro, prima fotografandolo e poi, ricollocata a posto la riproduzione, fotografandola con un obiettivo collocato al posto del reticolo. Difatti, poichè la distanza di due righe nella 1^a riproduzione è $de = md\lambda/2s \cos e$, e l'angolo delle due pellicole è in ogni punto uguale ad e , la proiezione di de sulla 2^a pellicola sarà uguale a $md\lambda/2s$, cioè proporzionale a $d\lambda$ ed indipendente da e .

Se invece si osservano gli spettri con un oculare, solo una riga potrà trovarsi nel suo piano focale ed apparire nitida: le adiacenti si troveranno avanti o dietro di esso, e dovranno apparire meno nitide; però, in pratica, non ho trovato che questo inconveniente fosse molto sensibile. In quanto alla distanza apparente di due righe essa è la proiezione della distanza reale suddetta sul piano focale facente con essa un angolo e , e sarà quindi ancora uguale a $md\lambda/2s$ e proporzionale a $d\lambda$. Indicherò in seguito un altro modo per evitare del tutto il suddetto inconveniente.

Per effettuare questa disposizione, ho collocato sopra un tavolo, in direzione del portalucente, un banco d'ottica lungo 3 metri (in realtà molto meno, perchè mi contentavo d'osservare solo due o tre spettri; ed inoltre, quando occorreva, lo spostavo), rappresentato schematicamente, nella figura, da RX. All'estremità di questo banco opposto al portalucente ho collocato lo spettrometro, e vi ho fissato il reticolo colle linee verticali; inoltre, sopra un corsoio del banco ho fissato la fessura verticale, coll'oculare. Il punto medio (R) del reticolo deve trovarsi sull'asse geometrico dello spettrometro e sulla retta RF percorsa dal punto medio F della fessura scorrente lungo il banco d'ottica, e questa dev'esser sostenuta da un'asta cilindrica e trovarsi sul suo asse.

Due regoli orizzontali, lunghi e leggeri (RC, FC), sono fissati ad un capo, uno al sostegno del reticolo (che può ruotare attorno all'asse dello spettrometro), l'altro ad un tubo verticale cui serve d'asse l'asta che sostiene la fessura; ed all'altro capo essi sono fissati alle due metà d'una leggera cerniera C coll'asse verticale, cosicchè rimane compìto il triangolo articolato RCF. La lunghezza dei due regoli fra i vertici (cioè fra gli assi geometrici dello spettrometro e della cerniera, e fra questo e quello della fessura) dev'essere esattamente $R/2$.

Se questi due lunghi regoli non fossero sostenuti in qualche modo, essi, per quanto rigidi e leggeri (condizioni contrastanti), si fletterebbero, la cerniera s'abbasserebbe e s'inclinerebbe alquanto, la lunghezza dei regoli fra gli assi suddetti più non sarebbe esattamente $R/2$, un momento non piccolo agirebbe sullo spettrometro e sulla fessura tendendo a rovesciarli o deviarli, e crescerebbe l'attrito che porrebbe ostacolo al buon funzionamento delle articolazioni.

Non mi è parso opportuno di sostenere i regoli dal basso mediante un carrello ad una o più ruote o sfere scorrevoli sul piano del tavolo o sul pavimento; e mi è parso più facile il sostenerli dall'alto. Perciò ad un sostegno indipendente e molto stabile, sopra lo spettrometro e coassialmente con esso, ho fissato un pernio verticale, attorno al quale poteva ruotare un robusto regolo orizzontale, un po' più lungo del regolo RC e sostenente questo (e, quindi, anche l'altro regolo CF) mediante due o più fili, in modo che, anche staccando la connessione fra il reticolo ed il regolo RC, questo nè cascava, nè deviava, e quindi, col suo peso, non esercitava un momento apprezzabile sul reticolo stesso.

Sebbene le dimensioni dell'apparecchio ora descritto, almeno per un reticolo di 3 metri di raggio di curvatura, non siano eccessive, poichè occupano un rettangolo di 3 metri per 1,50, o anche meno, esse possono essere ridotte alla metà in ogni senso: cioè, nel caso suddetto, ad un rettangolo di 1,50 per 0,75 metri, qualora i raggi incidenti, oppure quelli emergenti, siano paralleli.

Se la fessura, o la sua immagine, è a distanza infinita nella direzione del banco d'ottica, ed invia raggi sul reticolo la cui orientazione sia determinata, colla disposizione suddetta, dalla posizione del vertice F lungo RX, l'immagine della fessura formantesi, per raggi d'una conveniente lunghezza d'onda, nella direzione dei raggi incidenti, si troverà in O, a metà distanza fra R ed F, qualunque siano la posizione di F sul banco d'ottica, e la corrispondente orientazione del reticolo. Vale a dire che essa immagine si formerà sull'intersezione colla retta RF d'una circonferenza tangente in R al reticolo, e di raggio $cR = cO = R/4$.

Se quindi si costruisce un apparecchio simile a quello sopra descritto ma con regoli Rc , Oc di metà lunghezza: se inoltre la fessura immobile, a distanza qualsiasi, nella direzione del banco d'ottica, invia i raggi sopra una lente collimatrice (pure immobile ed avente il foco nel mezzo della fessura) che renda paralleli questi raggi, e se l'oculare è posto nel vertice articolato o , si potranno osservare nel suo campo nitidamente le righe d'uno spettro, le quali si sposteranno succedendosi e mantenendosi nitide quando l'oculare si sposta lungo il banco d'ottica, regolandosi l'orientazione del reticolo.

Se invece nel vertice O, collegato, nel modo anzidetto, con R e con c e scorrevole lungo RF, si colloca la fessura, la sua immagine nella dire-

denti si formerà allora in $r''v''$, ad una distanza da F' che varierà quando si sposta la fessura lungo il banco d'ottica, ossia quando varia l'angolo $C'RF'$; e l'oculare o la pellicola non dovranno avere una posizione fissa rispetto alla fessura, ma dovranno avvicinarsi ad essa quando essa s'avvicina al reticolo. Se invece i due regoli fossero più lunghi di $R/2$, e la fessura si trovasse in F'' , essa produrrebbe uno spettro in $r''v'$, la cui distanza dalla fessura ancora decrescerebbe (però in direzione contraria) quando questa si avvicina al reticolo.

Può anche facilmente avvenire che, per imperfetta rigidità dei regoli, o delle connessioni, il reticolo non obbedisca prontamente ai movimenti del corsoio, e si orienti a scatti, specialmente quando s'inverte il suo movimento; ne seguirebbe una certa difficoltà nel condurre una qualsiasi riga in una posizione esattamente determinata; inoltre, siccome la imperfetta rigidità dei regoli produrrebbe una variazione delle distanze RC e CF , anche ne seguirebbe che gli spettri si formerebbero a scatti, ora sulla pellicola, ora davanti o dietro di essa.

Non credo, però, che questi inconvenienti, che, certo, renderebbero meno facili le osservazioni, influiscano direttamente sulla precisione dei valori delle lunghezze d'onda per le diverse righe, poichè essi dipendono unicamente dalla esatta misura degli angoli.

Non mi sono finora occupato se non della parte meccanica dell'apparecchio che, sebbene costruito imperfettamente, risultò molto utile. Non ho perciò eseguito misure di angoli e di lunghezza d'onda: anzi, lo spettrometro, che facilmente sarebbe stato danneggiato nelle molteplici prove, era sostituito da un sostegno provvisto degli stessi movimenti, ma privo di graduazione. Neppure ho eseguito confronti esatti fra la nitidezza di questi spettri e quelli ottenuti nel modo solito, cioè per $e=0$; e mi sono contentato di verificare che un grande svantaggio non era manifesto.

Chimica — *Sulle ossime dell'anafil-fenil-chetone*. Nota di MARIO BETTI e di PASQUALE POCCIANI, presentata dal Corrisp. A. PERATONER.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Se ha luogo una birifrangenza anormale nelle prossimità di una riga spettrale di un vapore metallico in un campo elettrico.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Alle anomalie nell'emissione delle righe spettrali per l'azione di un campo magnetico, e cioè alla moltiplicazione delle righe con caratteri di polarizzazione diversi, corrispondono, come è noto, anomalie nella velocità di propagazione della luce in seno al vapore metallico, a seconda dello stato di polarizzazione della luce incidente. E così, nel senso delle linee di forza, alla scissione della riga in due con polarizzazione circolare inversa corrisponde, per una lunghezza d'onda vicina a quella delle righe, una diversa velocità di propagazione di due raggi polarizzati circolarmente in senso opposto; e quindi una rotazione anormale del piano di polarizzazione (esperienza di Macaluso e Corbino).

Analogamente, nel senso normale alle linee di forza, alla scissione della riga in tre componenti, con vibrazioni parallele o normali al campo, corrisponde una velocità di propagazione diversa a seconda del piano di polarizzazione della luce incidente, e quindi una birifrangenza anormale nella prossimità della riga (esperienza di Voigt e Wiechert).

Questi fenomeni della polarizzazione rotatoria, o della birifrangenza anormale, sono assai più facilmente osservabili che non l'altro cui sono rilegati: la scissione delle righe. Così con un campo magnetico di alquante centinaia di Gauss, mentre è assai difficilmente osservabile il fenomeno Zeeman, riesce ben netta la constatazione della polarizzazione rotatoria ricorrendo a una fiamma di sodio, disposta tra nicol incrociati, e traversata da un fascio di luce bianca. La birifrangenza è però meno facile a constatare, nei campi deboli, che non la polarizzazione rotatoria; poichè mentre quest'ultima dipende dalla prima potenza del campo, la birifrangenza è proporzionale al quadrato del campo.

È d'altra parte ben legittimo il ritenere che alla scomposizione delle righe per un campo elettrico, osservata recentemente da Stark, debba corrispondere, come nell'esperienza di Voigt e Wiechert, una birifrangenza anormale nelle prossimità della riga.

Il vapore attraversato dalla luce deve possedere una densità non trascurabile, perchè riescano sensibili le azioni esercitate sulla luce che si propaga nel suo seno; sarebbe perciò vano ricorrere al gas di assai piccola densità, reso luminoso, nella esperienza Stark, dai raggi canali. Volendo invece aumentare notevolmente la densità dei vibratorii, il valore del campo

elettrostatico realizzabile non può superare quello ordinariamente esistente in un arco voltaico. Mi è parso quindi conveniente di riprovare in condizioni migliori una esperienza già da me tentata, con esito negativo, molti anni or sono; ricercare cioè se i vapori metallici esistenti in seno ad un arco, tra carboni impregnati, presentino tracce di birifrangenza sensibile nelle vicinanze delle righe del metallo.

La disposizione sperimentale è schematizzata nella figura 1. In essa A rappresenta un arco a corrente continua di grande intensità, tra carboni ordinari. La luce, resa parallela da un buon obbiettivo L, passa per un primo nicol N, attraversa poscia un secondo arco A', ricco specialmente di vapori

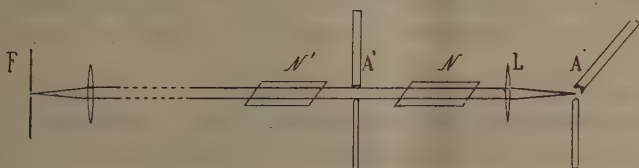


FIG. 1.

di calcio e di sodio, e, dopo aver traversato un secondo nicol N', vien concentrata sulla fenditura F di uno spettroscopio potente (un reticolo di Rowland). Tra il nicol N' e la fenditura F è interposta una notevole distanza, in modo che il fascio parallelo, che proviene da L, giunge in F con piccolo indebolimento, mentre è fortemente attenuata la luce divergente prodotta dall'arco A'.

Non ostante ciò, disponendo i nicol N N' in posizione incrociata, e a 45° dalla direzione media dell'arco A', la luce di questo giunge ancora abbastanza intensa sul reticolo perchè si vedano chiaramente le righe di emissione, delle quali alcune si presentano come autoinvertite.

Esse appaiono luminose su fondo oscuro, perchè i nicol incrociati arrestano la luce proveniente dal primo arco A. Per giudicare se la luminosità delle righe è propria dell'arco A', o deriva da un effetto di birifrangenza anormale, nella loro immediata vicinanza, esercitata dal vapore sulla luce di A, basta intercettare periodicamente il fascio tra L ed N. Nessuna variazione nell'aspetto e nella intensità delle righe potè essere osservata in questa manovra.

In una seconda prova al fascio di luce bianca proveniente da L fu sostituito un fascio di luce solare; e dei carboni (di tipo ordinario) tra cui scecca l'arco A', uno venne forato, e la cavità risultante fu riempita di cloruro di sodio fuso.

In queste condizioni la grande densità dei vapori di sodio esistente nell'arco faceva sì che, osservando lo spettro di emissione, intorno alle righe D una rilevante parte dello spettro apparisse luminosa come per uno slarga-

mento grandissimo delle righe medesime; mentre al posto di queste appa-
rivano due larghe righe di assorbimento per autoinversione.

Mandando o intercettando la luce solare attraverso l'arco, sempre con
nicol incrociati, nessuna modificazione sensibile si riuscì a constatare nel-
l'aspetto del campo luminoso.

Si deve quindi concludere che, per l'azione del campo elettrico natural-
mente esistente in seno ad un arco, non si determina in prossimità delle
righe una birifrangenza apprezzabile.

Fisica. — *Sull'interferografo girante del sig. Sagnac.* Nota
del prof. LUIGI PUCCANTI, presentata dal Socio A. RÒITI.

Il sig. Sagnac ha effettuato recentemente ⁽¹⁾ una difficile ed elegante
esperienza, colla quale prova che le frangie, le quali si producono per l'inter-
ferenza di due fasci luminosi propagantisi in versi opposti lungo un perimetro
chiuso, subiscono uno spostamento quando s'inverte il movimento rotatorio,
cui partecipano solidalmente tutti i pezzi ottici a cui si appoggiano i vertici
del perimetro stesso, non che la sorgente luminosa e la camera che serve
a fotografare le frangie.

Lo spostamento misurato risulta in eccellente accordo con la espressione

$$(1) \quad \zeta = \frac{16\pi NS}{V\lambda},$$

ove ζ indica lo spostamento in frangie, N il numero dei giri per secondo
del moto rotatorio che si inverte, S l'area racchiusa dal perimetro, V la
velocità della luce, e λ la lunghezza d'onda.

A questa espressione il Sagnac era giunto svolgendo una sua teoria dei
fenomeni luminosi nei corpi in moto, il cui punto di partenza è l'ipotesi
dell'etere.

Per questo egli crede di poter considerare la sua esperienza come una
dimostrazione dell'etere: ciò che, parmi, deve intendersi dimostrazione del-
l'esistenza obiettiva di un mezzo che invade lo spazio, e che propaga i feno-
meni luminosi.

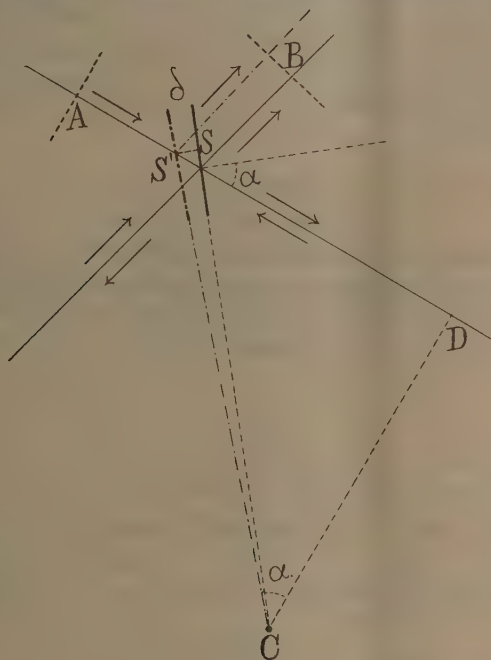
Ora, alla relazione (1) si può arrivare per altra via. Io mi sono limitato
al caso semplice, che il perimetro interferenziale sia circoscrittibile ad un
cerchio.

Ricordando che un movimento traslatorio del sistema relativo all'etere
non può influire sulla posizione delle frangie per i termini di primo ordine
del rapporto tra la velocità del movimento e la velocità di propagazione

(1) Comptes Rendus, vol. 157, pag. 708 (1913); vol. 157, pag. 1410 (1913).

della luce, e osservando che non è il caso di discutere i termini del secondo ordine, si vede subito che anche accettando l'ipotesi dell'etere (come non accettandola), si può esser certi di non alterare il risultato dell'esperimento, quando compongasi col moto rotatorio uniforme del sistema un qualsiasi moto traslatorio uniforme.

Ciò premesso, potremo impunemente ammettere che l'asse di rotazione passi per il centro C del circolo inscritto (fig. 1), perchè ve lo potremo ricondurre immaginando impresso al sistema un opportuno moto traslatorio.



Consideriamo da prima il sistema in quiete, e applichiamo il principio di Fermat. Confrontiamo il cammino ottico che va da A a B seguendo il perimetro, con un'altra spezzata qualsiasi, i cui lati facciano piccoli angoli con quelli del cammino ottico stesso, e che abbia i vertici sulle stesse superficie riflettenti, e gli estremi in A e B o anche in due altri punti qualunque degli elementi di piani perpendicolari ai raggi in A e B . La differenza di lunghezza è una quantità piccolissima, di ordine superiore al primo.

Quando il sistema è in rotazione compiendo un piccolo angolo δ (per esempio, verso sinistra) nel tempo impiegato dalla luce a girare il perimetro, le direzioni di propagazione vengono alterate di angoli aventi lo stesso ordine di grandezza che ha δ . Perciò, seguendo queste nuove direzioni, il percorso dall'elemento piano normale ai raggi in A a quello normale ai raggi

in B non varierebbe che per termini d'ordine superiore, se non fosse l'effetto dello spostamento dei pezzi ottici in direzione normale alla loro superficie. Ora questo spostamento, per gli specchietti che formano i vertici del perimetro, e rotano (colla semplificazione da me adottata) intorno ad un punto della loro normale per il centro, rimane ancora nei termini del secondo ordine rispetto a δ ; cosicchè basta tener conto dello spostamento del separatore S, valendosi della ben nota teoria delle lamine sottili. In questo caso, la differenza in B di cammino tra il raggio destrorso e il sinistrorso proviene dunque soltanto da ciò: che questo, compiuto il giro, trova la superficie del separatore spostata da S in S'. E risulta in ogni caso ritardato il fascio luminoso che gira concordemente al sistema.

La differenza di percorso risulta dunque uguale al doppio della proiezione del segmento SS' sulla AD: cioè sarà

$$A = 2\overline{SS'} \cos \alpha,$$

e indicando ancora con N il numero di giri per secondo, con P la lunghezza del perimetro e con V la velocità della luce, facilmente si vede essere:

$$\overline{SS'} = 2\pi N \frac{P}{V} \overline{CS}.$$

e quindi

$$A = 4\pi N \frac{P}{V} \overline{CS} \cos \alpha.$$

Ma

$$\overline{CS} \cos \alpha = \overline{CD}$$

è l'apotema, e quindi introducendo l'area racchiusa dal perimetro

$$S = \frac{1}{2} P \cdot \overline{CD},$$

risulta:

$$A = \frac{8\pi NS}{V},$$

da cui, raddoppiando per l'inversione del moto, ed esprimendo il ritardo in lunghezze d'onda si ottiene:

$$\zeta = \frac{2A}{\lambda} = \frac{16\pi NS}{V\lambda},$$

cioè ancora la (1), la quale è stata data dal Sagnac in generale, e da lui verificata con l'esperienza. È vero che la sua esperienza è fatta per un perimetro meno regolare: ma è ovvio che, anche per il caso semplice da me

scelto, come la sua teoria porta allo stesso risultato del mio computo, così l'esperienza confermerebbe il risultato comune.

Fin qui niente di nuovo, adunque: anzi potrebbe parere che il concetto mio e quello del Sagnac si equivalessero; invece, l'opinione mia è nettamente diversa dalla sua per quel che concerne l'interpretazione del fatto.

Nella mia dimostrazione non ho introdotto esplicitamente altre ipotesi che le leggi dell'ottica geometrica, la propagazione della luce in un tempo finito da un punto ad un altro e il principio delle interferenze delle lamine sottili, che è come dire le interferenze di Newton. Non mi sono accorto di avere introdotto implicitamente l'ipotesi dell'esistenza obiettiva del mezzo, e nemmeno la propagazione per onde. Ritengo, quindi, che la teoria di Newton porti, in questo caso, come in tanti altri, allo stesso risultato della teoria ondulatoria.

A fortiori l'ipotesi dell'esistenza dell'etere non era necessaria per prevedere il fatto, e non risulta da questo provata.

L'esperienza si deve secondo me interpretare come un metodo di determinazione della velocità della luce.

Ma il suo interesse filosofico è sempre grandissimo, in quanto che essa è la prima esperienza ottica che permetta di rivelare un moto rotatorio assoluto.

Fisica. — *La decomposizione della riga rossa dell'idrogeno nel primo strato catodico.* Nota del prof. LUIGI PUCCIANI, presentata dal Socio A. RÒITI.

Chimica. — *Ricerche di chimica sistematica. Rutenio, rodio, palladio.* Nota di G. A. BARBIERI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sul comportamento degli eteri borici con gli alcoolati* (1). Nota di LIVIO CAMBI, presentata dal Socio R. NASINI.

Occupandomi del comportamento dei boro alchili con gli alcali e gli alcoolati (2), cioè dei composti del tipo $[\text{BR}_3 \cdot \text{OH}]' \text{K}$, accennai, per analogia, al composto del borato di etile con l'alcoolato sodico, $\text{B}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4 \cdot \text{Na}$, ottenuto da Copeaux per semplice addizione diretta (3).

H. Copeaux osservò, inoltre, che tale composto a 200° non cede etere borico; l'alcoolato sodico in esso combinato non reagisce con lo ioduro di etile a 140° . Ciò attesta la notevole stabilità del sale.

A questo interessante prodotto Copeaux diede la costituzione seguente: $\text{B} \equiv (\text{OC}_2\text{H}_5)_4$ (4). Ammettendo il boro come pentavalente. H. Kauffmann (5)

Na

discutendo della valenza del boro, citava questo sale, e, oltre alla formola di Copeaux, prendeva in considerazione l'altra $\text{NaO} - \text{B} \equiv (\text{OC}_2\text{H}_5)_3$; però

C_2H_5

questa formola non trova alcun riscontro nelle reazioni del composto.

Come dissi, venni allo studio delle reazioni degli eteri borici per la simiglianza di comportamento che essi hanno con i boro alchili di cui mi occupo. Ho verificato i dati di Copeaux: non solo, ma ho generalizzato la reazione ad altri eteri dell'acido borico. Ho isolato i sali ossimetilici di sodio, litio, potassio, calcio: quelli ossietilici di sodio, potassio, tallio (talloso): infine il sale ossipropilico di sodio.

Tutti questi composti hanno una notevole stabilità, riscaldati anche nel vuoto non cedono l'etere borico in essi combinato. Essi partecipano, in soluzioni alcooliche assolute, a reazioni di doppio scambio che illustrano il loro carattere salino.

Una soluzione metilalcoolica del sale $\text{K} \cdot \text{B}(\text{OCH}_3)_4$ fornisce, con cloruro di litio in egual solvente, cloruro di potassio, che precipita; e dalla soluzione, per svaporamento, si ottiene il sale di litio corrispondente:



(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di elettrochimica del R. Istituto tecnico superiore di Milano, diretto dal prof. G. Carrara.

(2) Rendiconti della Soc. chim. ital., pag. 327 (1913).

(3) Compt. Rend., 127, pag. 721 (1898).

(4) Ibidem, pag. 722.

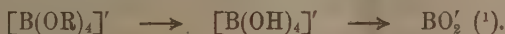
(5) H. Kauffmann, *Die Valenzlehre*, pag. 232 (1911).

E, viceversa, la soluzione etilica del sale pure potassico ossietilico con acetato talloso separa, finamente cristallino, il sale talloso, e rimane in soluzione l'acetato alcalino:

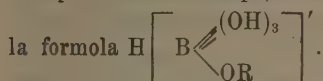


Il calcio metallico si discioglie rapidamente nella soluzione metilalcolica dell'etere $\text{B}(\text{OCH}_3)_3$, per fornire il sale solubilissimo $\text{Ca}[\text{B}(\text{OCH}_3)_4]_2$.

Questi sali quindi potremo considerarli come derivati da acidi, certamente assai instabili, tetraossialchilborici: $\text{H}[\text{B}(\text{OR})_4]$. Essi si idrolizzano in acqua, generando alcool e metaborato alcalino:



Il qui descritto comportamento degli eteri borici si riconnette con quello, ben noto e ripetutamente studiato, dell'acido borico con alcune sostanze a funzione alcoolica. È noto che la mannite, la glicerina, addizionandosi in soluzione acquosa all'acido borico, possono ionizzare, almeno entro il limite di sensibilità di taluni indicatori, un atomo di idrogeno per ogni atomo di boro. Probabilmente questi acidi complessi hanno una costituzione analoga al tipo di cui mi occupo, cioè una struttura intesa, in linea generale, secondo



Ma il comportamento degli eteri borici ha un'importanza che va oltre la chimica del boro. Già Beilstein ⁽²⁾ prevedeva che gli alcoolati si sarebbero addizionati agli eteri degli acidi carbossilici. Geurther ⁽³⁾ ricercò questi composti, d'addizione ma non isolò alcun prodotto, probabilmente per la loro instabilità. Certo però tali composti, in soluzione per lo meno, debbono intervenire in numerose reazioni degli eteri degli acidi carbossilici che si compiono in presenza di alcoolati. Questa supposizione, generalmente ammessa, è avvalorata dal fatto che si conoscono derivati di questo tipo di alcuni eteri dell'acido benzoico. Claisen ha descritto il sale ottenuto anche dal metilato

sodico e dall'etere benzilico, $\text{C}_6\text{H}_5 \begin{array}{l} \nearrow \text{OC}_7\text{H}_7 \\ \searrow \text{OCH}_3 \\ \searrow \text{ONa} \end{array}$ ⁽⁴⁾, oppure dall'etere metilico e dal benzilato sodico.

(1) Richiamo gli idrati $\text{NaBO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ e $\text{NaBO}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, a proposito della possibilità di un anione $\text{B}(\text{OH})_4^-$.

(2) Beilstein, Bull. Soc. Chim., pag. 14 (8 febr.) 1859.

(3) Geurther, Bull. Soc. Chim., XII, pag. 369 (1869).

(4) Claisen, Berichte, 20 (1887), 646.

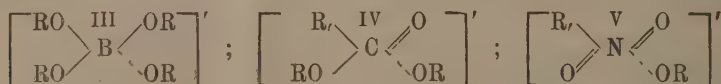
Citerò a tal proposito una reazione che trova un riscontro particolare negli eteri borici. Da molto tempo è noto che certe reazioni di doppio scambio fra alcoli ed eteri:



si compiono con singolare facilità in presenza di alcoolati. Si può presumere che intervengano composti del tipo succitato ⁽¹⁾. Infatti, aggiungendo, ad una soluzione propilalcoolica di propilato sodico, borato trietilico, precipita immediatamente un sale, poco solubile, che è identico a quello ottenuto dall'etere borico propilico e dal propilato sodico: $Na B(OC_3H_7)_4$. Analoga reazione si compie fra etere borico etilico e metilato sodico in alcool metilico. Si hanno quindi, in questo caso, rapidissimi i fenomeni di doppio scambio su ricordati.

Passando ad un altro gruppo di composti, ricorderò che molti nitroderivati si combinano con gli alcali o alcoolati per generare quei sali cui Angeli diede la costituzione $R-N \begin{smallmatrix} \nearrow OK \\ \searrow OCH_3 \\ \downarrow O \end{smallmatrix}$ ⁽²⁾. Questi composti vennero ravvicinati appunto a quelli forniti dagli eteri degli acidi carbossilici ⁽³⁾.

In questi vari gruppi di composti noi troviamo una manifestazione generale: essi si comportano, rispetto agli alcali o agli alcoolati, come anidridi ⁽⁴⁾, che si salificano sommando intere molecole di alcali. Ciò corrisponde al comportamento di quegli acidi che Werner ha chiamati anidroacidi ⁽⁵⁾; ed anche nei casi qui discussi potremo ricondurre tale proprietà ad una attività dell'atomo centrale che tende a saturare le sue affinità residuali:



È un comportamento analogo, per citare un caso ben noto, a quello dell'idrato platinico, $Pt(OH)_4$, nella salificazione.

PARTE SPERIMENTALE.

Gli eteri borici vennero preparati col metodo di Schiff; i vari alcoolii anidri vennero posti a reagire in tubo chiuso, alle temperature volute, con

⁽¹⁾ Purdie B 20 (1887), 1554.

⁽²⁾ Angeli, Gazzetta chimica it., 27, II, pag. 366.

⁽³⁾ Hantzsch u. Rinckenberger, Berichte, 32, I, pp. 629 e 630.

⁽⁴⁾ Ricorderò anche il composto $\begin{array}{c} HO \nearrow \\ H \searrow \end{array} N \begin{array}{c} \nearrow O \\ \searrow OR \end{array}$ ammesso da Bayer e Williger [Berichte.

34, pag. 755 (1901)].

⁽⁵⁾ Werner, Neure Anchaungen, 2 Auf., pp. 231 e 232.

la quantità calcolata di anidride borica. Essi vennero poi rettificati per distillazione frazionata; in qualche caso si usò il cloruro di calcio fuso ⁽¹⁾ per separare da essi la più gran parte dell'alcool rimasto incombinato.

In accordo con i dati dei diversi autori, l'etere metilico bolliva a 65°-66° a pressione ordinaria; quello etilico a 121°, e quello propilico-normale a 175°.

I composti che descriverò vennero ottenuti aggiungendo l'etere borico, in lieve eccesso, alla soluzione di alcoolato: e i composti, cristallizzati o per raffreddamento o per lenta evaporazione delle soluzioni in ambiente secco su acido solforico, vennero rapidamente lavati con l'alcool *assoluto*, asciugati fra carta bibula secca, e analizzati. Operando, in questo, diversamente da Copeaux che distillò semplicemente l'alcool della sua miscela nel vuoto e poi seccò il residuo su acido solforico. A Copeaux sfuggirono in questo modo i fenomeni di cristallizzazione del suo sale, che infatti, come gli altri sali alcalini da me preparati, si separa con solvente di cristallizzazione.

Le analisi per quel che riguarda la determinazione dell'alcali e dell'acido borico vennero eseguite disciogliendo il sale nell'acqua: l'alcali con $\text{HCl } \frac{n}{10}$, con metilorange; poi, dopo aggiunta di mannite, l'acido borico veniva dosato con $\text{Ba(OH)}_2 \frac{n}{10}$ e fenolftaleina.

I gruppi ossietilici o ossimetilici presenti nei vari composti vennero determinati con il metodo Zeisel, usando un apparecchio simile a quello usato da Goldschmiedt ⁽²⁾ per la determinazione dell'alcool di cristallizzazione ⁽³⁾.

Sali ossimetilici.

Questi sali vennero preparati o dall'etere borico trimetilico e alcoolato metilico in alcool metilico anidro, o dall'etere trietilico e alcoolato metilico nello stesso solvente.

I) $\text{Na} \cdot \text{B(OCH}_3)_4$.

Dei sali che ho studiato, è quello che cristallizza più facilmente, in grandi prismi incolori che sfioriscono all'aria perdendo alcool e decomponendosi. Il sale nel vuoto, su acido solforico, perde tutto il solvente di cristallizzazione.

⁽¹⁾ Frankland, Liebig's Ann., 124, pag. 132.

⁽²⁾ Monatshefte, 19, pag. 325 (1898).

⁽³⁾ Nel tubo a U laterale veniva posto il sale con tanta acqua da decomporlo.

Riferisco i dati analitici seguenti:

	Trovato in 100 parti		Calcolato per
	I	II	$\text{NaB}(\text{OCH}_3)_4, 1 + \frac{1}{2} \text{CH}_3.\text{OH}$
Na	11,12	11,35	11,16
B	5,14	5,21	5,22
$\text{CH}_3.\text{OH}$	23,50	—	23,11

L'alcool metilico si intende determinato dalla perdita in peso su acido solforico nel vuoto. Il sale secco diede i risultati seguenti:

	Trovato in 100 parti	Calcolato per $\text{NaB}(\text{OCH}_3)_4$
Na	14,53	14,55
B	6,89	6,95
OCH_3	78,31	78,50

Le analisi I), come quelle del sale secco, si riferiscono al sale ottenuto dal borato etilico; le II) a quello preparato direttamente dal borato metilico.

II) $\text{Li}.\text{B}(\text{OCH}_3)_4$.

Questo sale venne ottenuto, come si disse, per doppio scambio dal sale potassico corrispondente: in soluzione metilalcolica con cloruro di litio (secco e fuso). Cristallizza in lunghi prismi setacei. È molto più solubile del sale sodico su descritto.

Le analisi diedero il risultato seguente:

	Trovato in 100 parti		Calcolato per
	I	II	$\text{LiB}(\text{OCH}_3)_4, 2 + \frac{1}{2} \text{CH}_3.\text{OH}$
Li	3,29	3,23	3,12
B	—	4,91	4,95
$\text{CH}_3.\text{OH}$	34,98	—	36,05

Il sale sfiorisce rapidamente in ambiente secco. Portato a peso costante nel vuoto, ha fornito i risultati analitici seguenti:

	Trovato in 100 parti	Calcolato per $\text{LiB}(\text{OCH}_3)_4$
Li	4,92	4,88
B	7,74	7,74

III) $\text{K}.\text{B}(\text{OCH}_3)_4$.

Si ottenne, analogamente al sale sodico, dai due eteri metilico o etilico dalle soluzioni con metilato potassico. Cristallizza in grandi prismi che sfio-

riscono rapidamente in ambiente secco. Le analisi condussero alla formola seguente, analoga a quella del sale sodico:

	Trovato in 100 parti		Calcolato per $K.B(OC_2H_5)_4, 1 + \frac{1}{2} CH_3.OH$
	I	II	
K	17,18	17,33	17,59
B	4,80	4,96	4,95
$CH_3.OH$	21,85	—	21,80

Il sale portato a peso costante su acido solforico nel vuoto, ha dato i risultati seguenti:

	Trovato in 100 parti	Calcolato per $K.B(OC_2H_5)_4$
K	22,50	22,44
B	6,31	6,31

IV) $Ca[B(OC_2H_5)_4]_2$.

Questo sale è solubilissimo in alcool metilico; e non riuscì ad averlo cristallino. La soluzione metilalcoolica diviene, svaporandosi, densa e sciepposa: il residuo, portato a peso costante nel vuoto, aveva la composizione voluta; era incolore. Con l'acqua, fornisce borato di calcio. Venne preparato disciogliendo il calcio metallico in limatura nella soluzione in alcool metilico dell'etere etilico o metilico.

Del prodotto riferisco l'analisi seguente:

	Trovato in 100 parti	Calcolato per $CaB[OC_2H_5]_4$
Ca	12,69	12,92
B	6,82	7,09

Sali ossietilici.

A questi appartiene, unico derivato finora noto, il sale di Copeaux. Vennero preparati dagli alcoolati e dall'etere trietilborico. Il sale talloso si ottenne per doppio scambio dal sale di potassio e acetato talloso.

V) $Na.B(OC_2H_5)_4$.

È molto meno solubile in alcool etilico del corrispondente derivato metilico in alcool metilico. Dalle soluzioni diluite si separa in piccoli prismi incolori rombici, lucenti, che sfioriscono rapidamente, anche in ambiente secco, perdendo l'alcool di cristallizzazione. La perdita in peso, del sale cristallizzato, nel vuoto su acido solforico, condurrebbe ad ammettere una molecola di alcool di cristallizzazione.

	Perdita in peso su 100 parti	Calcolata per $NaB(OC_2H_5)_4, C_2H_5.OH$
$C_2H_5.OH$	12,90	14,05

Il sale, portato a peso costante, aveva la composizione seguente:

	Trovato in 100 parti	Calcolato per $\text{NaB}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4$
	I	
Na	10,96	10,75
B	5,24	5,14

VI) $\text{K} \cdot \text{B}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4$.

Il sale di potassio è molto più solubile di quello sodico su descritto. Cristallizza per svaporamento, in ambiente secco, dalle soluzioni, in grandi prismi appiattiti: che come quelli del sale precedente perdono con grande facilità il solvente di cristallizzazione. La determinazione della perdita di peso nel vuoto su acido solforico condurrebbe ad ammettere come più probabile $1 + \frac{1}{2}$ molecole di alcool di cristallizzazione. La media di due determinazioni ha dato il risultato seguente:

	Perdita in peso su 100 parti	Calcolata per $\text{K} \cdot \text{B}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4, 1 + \frac{1}{2} \text{C}_2\text{H}_5 \cdot \text{OH}$
$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	21,05	23,34

Il sale, privo di solvente di cristallizzazione, ha dato i seguenti risultati analitici:

	Trovato in 100 parti	Calcolato per $\text{K} \cdot \text{B}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4$
K	17,15	16,98
B	4,84	4,77

VII) $\text{Tl} \cdot \text{B}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4$.

Questo sale si separa, privo di solvente di cristallizzazione, in minuti cristalli aghiformi aggiungendo ad una soluzione alcoolica assoluta del sale precedente una soluzione. pure in alcool assoluto, di acetato talloso. L'acetato talloso è ricristallizzato dall'alcool assoluto.

Le determinazioni analitiche diedero i risultati seguenti:

	Trovato in 100 parti		Calcolato per $\text{Tl} \cdot \text{B}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4$
	I	II	
Tl	51,91	51,63	51,62
B	2,90		2,78

La determinazione I venne eseguita col metodo volumetrico anzidetto impiegando HNO_3 , $\frac{n}{10}$ la II dosando il tallio come TII.

Sale ossipropilico.

VIII) $\text{Na} \cdot \text{B}(\text{OC}_3\text{H}_7)_4$.

L'etere borico dell'alcool propilico normale si somma anch'esso con grande avidità all'alcoolato sodico corrispondente; dalla soluzione propilalcoolica di propilato sodico, per aggiunta dell'etere borico tripropilico, si precipita il sale in minute scagliette cristalline madreperlacee. Eguale prodotto si ottiene aggiungendo l'etere borico trietilico alla stessa soluzione.

Le determinazioni analitiche hanno condotto ai risultati seguenti:

	Trovato in 100 parti		Calcolato per
	I	II	$\text{Na B}(\text{OC}_3\text{H}_7)_4$, $\text{C}_3\text{H}_7 \cdot \text{OH}$
Na	7,24	7,44	7,29
B	3,47	3,46	3,49
$\text{C}_3\text{H}_7 \cdot \text{OH}$	—	18,84	19,06

Il sale, portato a peso costante nel vuoto, aveva la composizione seguente:

	Trovato in 100 parti		Calcolato per $\text{NaB}(\text{OC}_3\text{H}_7)_4$
	I	II	
Na	8,95	9,06	9,05
B	4,30	4,24	4,33

Le analisi I si riferiscono, anche in questo caso, al sale prodotto dall'etere propilico; quelle II si riferiscono al sale stesso, ottenuto invece dall'etere etilico.

Riassumendo i caratteri generali di questi composti, osserverò in primo luogo che essi si separano facilmente con solvente di cristallizzazione, come del resto fanno anche gli alcoolati alcalini cristallizzando dalle loro soluzioni alcooliche. Nel maggior numero dei casi, le determinazioni hanno condotto ad ammettere un numero non intero di molecole di alcoli di cristallizzazione per una molecola di sale. Per quanto questi sali perdano l'alcool di cristallizzazione rapidamente, pure tale ammissione è avvalorata dai numerosi casi che ho verificati. D'altra parte non sono infrequenti altri casi consimili. ⁽¹⁾

La stabilità, e il carattere di veri sali, che posseggono i prodotti su descritti, è dimostrata anche dal fatto che essi non manifestano quei caratteri di ossidabilità con l'ossigeno atmosferico, che invece si riscontrano in molti degli alcoolati corrispondenti.

⁽¹⁾ Ricordo che A. Attenberg ha descritto il metaborato $\text{KBO}_2 + 1\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$ (Zeit anorg. Chemie 48 (1906) pag. 368) e M. Dukelski ha descritto il metaborato $\text{K}_2\text{O} \cdot \text{B}_2\text{O}_3 + 2\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$ (Zeit. anorg. Chemie 50 (1906), pag. 41).

Infine, per quanto riguarda la solubilità, osserverò che essa aumenta nella serie Na, K, Li, Ca: il sale di tallio è il meno solubile e si separa privo di solvente di cristallizzazione. Ciò è pure conforme al comportamento di altri sali di quei metalli ad anione monovalente.

Il comportamento dell'acido borico con gli alcoolati, lo stato in cui si trovano questi interessanti composti qui descritti in soluzione, ed i fenomeni che accompagnano la loro formazione, saranno oggetto di ricerche ulteriori.

Fisica. — Osservazione diretta della scomposizione delle righe spettrali davanti al catodo in un tubo molto sottile. Nota del dott. ANTONINO LO SURDO, presentata dal Corrisp. A. GARBASSO ⁽¹⁾.

Nelle prime esperienze ⁽²⁾ avevo sempre adoperato tubi del diametro interno di circa 4 mm.: con essi è possibile di ottenere campi sufficientemente intensi per una netta separazione dei vari elementi nei quali vengono decomposte davanti al catodo le righe spettrali dell'idrogeno $H\beta$ e $H\gamma$.

Con tubi così grossi, e adoperando la dispersione adatta per risolvere i vari elementi, non è possibile l'osservazione diretta del fenomeno, poichè l'occhio non possiede la sensibilità sufficiente. Ho provato quindi ad aumentare lo scarto fra le componenti mediante campi elettrici più intensi, quali si ottengono nei tubi ancora più sottili (per es., con quelli aventi il diametro di mm. 1,5, a parità di potenziale, il vantaggio è notevole); ed ho riconosciuto che è possibile di spingere l'intensità della corrente ad un valore relativamente alto, a condizione che la parete del tubo sia molto spessa. Occorre ancora avere l'accortezza di interrompere la corrente prima che l'eccessivo riscaldamento danneggi il vetro o produca la sublimazione dell'alluminio al catodo; ma si può comodamente far funzionare il tubo per parecchi minuti ogni volta.

Il risultato al quale sono giunto è questo: Per la grande variazione di frequenza, il fenomeno si rivela anche con strumenti di piccolo potere risolutivo: per es., con un ordinario spettroscopio ad un sol prisma; e la luminosità è sufficiente perchè si possa osservare direttamente, specie sulla $H\beta$. Tra gli elettrodi di detti tubi veniva stabilita una differenza di potenziale

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel laboratorio di Fisica del R. Istituto di Studi superiori in Firenze.

⁽²⁾ In questi Rendiconti: Seduta del 21 dic. 1913, *Per l'effetto trasversale*; seduta del 4 genn. 1914, *Per l'effetto longitudinale*; seduta del 18 genn. 1914, *Per le diverse forme di scomposizione presentate dalle varie righe della serie di Balmer*.

complessiva di circa 7000 volt, l'intensità della corrente era di circa 1,5 milliampère, e la lunghezza dello spazio oscuro davanti al catodo risultava di mm. 2.

In tali condizioni è più vantaggioso disporre il tubo perpendicolare alla fenditura, per modo che la immagine del fascio catodico si incroci con essa e quindi nel collimatore penetri luce proveniente da una sola sezione normale; si utilizza lo strato immediatamente vicino al catodo, poichè ivi si ha il massimo effetto, come venne riconosciuto colla prima disposizione. Allora la decomposizione non conferisce agli elementi la configurazione ad Y, ma si osservano righe multiple parallele alla fenditura come quelle non decomposte.

Io ho adoperato dapprima la solita batteria di 5000 piccoli accumulatori, che mi aveva servito per tutte le esperienze: il fenomeno si può però osservare eccitando il tubo con un rocchetto di induzione o con una macchina elettrica capace di fornire una intensità sufficiente per illuminare il tubo, cioè circa di un milliampère: le macchine multiple ad induzione sono generalmente adatte.

Queste ultime notizie possono essere utili a rendere possibile lo studio del fenomeno anche a chi disponga soltanto degli ordinari mezzi di un modesto laboratorio di fisica.

Chimica. — *Sui polimeri dell'isosafrolo.* Nota di MARIO MAYER, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Chimica. — *Sul cloral- β -aminoazobenzene.* Nota di MARIO MAYER, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

AMADORI e VITERBI. *Sulla composizione della piromorfite.* Pres. dal Socio G. CIAMICIAN.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 febbraio 1914.

- Annali della Stazione sperimentale per le malattie infettive del bestiame. I volume, 1911-1912-1913. (R. Istit. d'incoraggiamento di Napoli). Napoli, 1913. 8°.
- AGAMENNONE G. — Il recente terremoto nel Molise. (Estr. dalla « Riv. di astronomia e scienze affini », 1913). Torino, 1913. 8°.
- CAVASINO A. — Sui cosiddetti strumenti aperiodici. (Estr. dal Boll. della « Soc. Sismol. Ital. », vol. XVII). Modena, 1913. 8°.
- Congrès International (1.^{er}) de pathologie comparée à la Faculté de médecine de Paris, du 17 au 23 octobre 1912. Programme. Paris, 1913. 8°.
- CREMONA L. — Opere matematiche, pubblicate sotto gli auspici della R. Acc. dei Lincei. Tomo I. Milano, 1914. 8°.
- Expedition (National antarctic) 1901-1904. Meteorology. Parte II. Comprising Daily synchronous charts ist october 1901, to 31 st March 1904. London, 1913. 4°.
- HUEBNER E. — Beitrag zur Theorie der isostatischen Reduktion der Schwerebeschleunigung. Leipzig, 1913. 8°.
- ISSEL A. — Naturalisti e viaggiatori liguri nel secolo XIX. (Estr. dagli « Atti della Soc. ital. per il progresso delle scienze », 1912). Roma, 1913. 8°.
- ISTRATI C. I. — Studiu relativ la o nomenclatură generală în chimia organică bazat si pe o clasificare rațională a acestei părți din Chimie. București, 1913. 8°.
- LEBON E. — Albin Haller; biographie, bibliographie analytique des écrits. (« Savants du Jour »). Paris, 1913. 8°.
- LONGO B. — Esiste l'*Helleborus niger* L. nel Senese? (Estr. dal « Bull. della Soc. bot. ital. », 1913). Firenze, 1913, f. v.
- LONGO B. — Ricerche sopra una varietà di *Grataegus Azarolus* L. ad ovuli in gran parte sterili. (Estr. dal « Nuovo Giornale bot. ital. », volume XXI). Firenze, 1913. 8°.
- LONGO B. — Ricerche su la *Coriavia myrtifolia* L. (Estr. dal « Bull. della Soc. bot. ital. », 1913). Firenze, 1913. 8°.
- LONGO B. — Su la supposta esistenza, in Toscana, del *Peganum Harmala* L. Firenze, s. d. 8°.
- LONGO B. — Su le *Chimere vegetali*. (Estr. dal « Boll. della Soc. bot. ital. », 1913). Firenze, 1913, f. v.
- Publicazioni dell'Istituto di chimica generale della R. Università di Pisa; anni 1910-1913. Roma, 1911. 8°.
- Servizi sanitari (I) e la chirurgia di guerra durante la campagna di Libia e d'Egeo sulle navi-ospedale e negli ospedali dipartimentali. (Ministero della Marina). Roma, 1913. 8°.